THEORIE DER DERIVATIONEN.

VON

ANTON KRUG.

(VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 17. OCTOBER 1889.)

Einleitung.

Der Gedanke, die Differentialquotienten und vielfachen Integrale einer gegebenen Function $f(z)$ als Specialfälle eines allgemeineren Ausdruckes $F(z, n)$, der von zwei Variablen z und n abhängt, aufzufassen, ist sehr alt, doch ist Liouville der erste, der diesen Gedanken weiter verfolgte und eine diesbezügliche Theorie ausbildete. Seit dieser Zeit haben sich viele Mathematiker mit diesem Gegenstande beschäftigt, und es ist die Literatur beträchtlich angewachsen. Wenn ich mich nun in der vorliegenden Abhandlung mit derselben Frage befasse, ohne mich auf irgend einen der Vorgänger zu beziehen, sondern vielmehr wieder von vorne beginne, die Theorie aufzubauen, so geschieht es, weil nach meiner Ansicht mit den bisherigen Ausführungen noch nicht das gesagt ist, was zu sagen ist, und wenn ich meiner Arbeit in dieser Beziehung einen Fortschritt vindicire, so ist es betreffs der Definition der Derivation (wie der Ausdruck $F(z, n)$ nach Herrn Grünwald benannt ist) und der functionentheoretischen Grundlage der Entwicklungen.

Einen Gedanken Riemann's benützend, gehe ich davon aus, der Derivation $D^n f(z) = F(z, n)$ die beiden Fundamentalforderungen aufzuerlegen

$$\frac{\partial}{\partial z} F(z, n) = F(z, n+1)$$

$$F(z, -\nu) = \int_a^{z\,(\nu)} f(z)\, dz^\nu \qquad \nu \text{ ganz und positiv}$$

(dass dann $F(z, +\nu)$ Differentialquotienten werden, ist ohne Weiteres klar); dann zeigt sich, dass hiedurch die Derivation noch nicht bestimmt ist, dass man also noch eine Forderung stellen kann. Für diese neue Forderung wählte ich die Relation

$$D^m D^n f(z) = D^{m+n} f(z)$$

als dritte Fundamentaleigenschaft, und dann ist die Derivation $F(z, n)$ vollkommen bestimmt und ich konnte sie durch das verallgemeinerte Cauchy'sche Integral ausdrücken. Ganz von selbst stellten sich die Bedingung der Derivirbarkeit der Function $f(z)$, sowie der Begriff des Intervalls, und endlich die Bedingung ein, unter der die dritte Fundamentaleigenschaft besteht.

Die Einfachheit und Natürlichkeit dieses Gedankenganges wird man nicht verkennen; es fragt sich jetzt nur, ist die auf diesem Wege gefundene Derivation auch identisch mit der bisher behandelten? Diese Frage ist zu bejahen; das zeigt die Darstellung

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+\nu} f(z) = \frac{1}{\Gamma(-n)} \frac{\partial^\nu}{\partial z^\nu} \int_a^z \frac{f(t)\,dt}{(z-t)^{n+1}}, \qquad \begin{array}{l} \text{real } n < 0 \\ \nu \text{ ganz und positiv} \end{array}$$

die sich im Wesentlichen überall findet (bei Liouville ist $a = \infty$, bei H. Grünwald und den Übrigen ist a endlich, während Buchwaldt beide Fälle zulässt).

I.

Definition der Derivation mit endlicher unterer Grenze.

1.

Wir bilden von einer vorgelegten Function $f(z)$ der complexen Variabelen z successive die Differentialquotienten und vielfachen Integrale, dann haben wir die beiden Reihen

$$\begin{array}{llll} f(z), \quad f'(z), & f''(z), \ldots & f^{(\nu)}(z) \ldots \\ \int_a^z f(z)\,dz, & \int_a^{z\,2} f(z)\,dz^2, \ldots & \int_a^{z\,\nu} f(z)\,dz^\nu \ldots, \end{array}$$

deren Glieder wir folgeweise mit

$$\text{1)} \qquad \begin{array}{lllll} F(z,0), & F(z,1), & F(z,2) \ldots & F(z,\nu) \ldots \\ & F(z,-1), & F(z,-2) \ldots & F(z,-\nu) \ldots \end{array}$$

bezeichnen wollen. Dabei soll die untere Grenze a der vielfachen Integrale endlich und sonst beliebig sein, jedoch von der Beschaffenheit, dass die Function $f(z)$ wirklich zwischen den Grenzen a und z integrirbar ist. Wir können dann sagen, dass die Differentialquotienten und vielfachen Integrale die speciellen Werthe sind, welche die allgemeinere Function

$$F(z,n)$$

für ganze positive und negative n, d. h. für $n = \pm \nu$ annimmt. Diese allgemeinere Function $F(z,n)$, welche eine Function der beiden von einander unabhängigen complexen Variabelen z und n ist, möge Derivation der vorgelegten Function $f(z)$ genannt werden; in diesem Sinne sind also die Operationen des Differenzirens und Integrirens specielle Fälle einer allgemeinen Operation, die wir dementsprechend das Deriviren nennen wollen.

Es ist nun zunächst zweckmässig, für das Differenziren und Integriren ein gemeinsames Zeichen einzuführen; dazu benützen wir vor der Hand das Zeichen D mit beigesetztem Index, nämlich

$$f^{(\nu)}(z) = D^\nu f(z)$$

$$\int_a^{z\,\nu} f(z)\,dz^\nu = D^{-\nu} f(z)$$

dann wird die analoge Bezeichnung für das Deriviren lauten:

$$F(z,n) = D^n f(z).$$

Stellen wir diese Gleichung um, indem wir, wie gebräuchlich, die auszuführende Operation linker Hand anzeigen und rechter Hand das fertige Resultat angeben, also

$$D^n f(z) = F(z,n),$$

so ist der Sinn dieser Gleichung derselbe wie etwa der der Gleichungen $3.4 = 12$, $\sqrt{9} = 3$ etc.

Es ist nun von vornherein leicht zu sehen, dass es unendlich viele Functionen $F(z,n)$ und daher auch unendlich viele Operationen D^n geben wird, welche für ganze, positive oder negative n die Differentialquotienten und vielfachen Integrale liefern, und unter diesen verschiedenen Functionen $F(z,n)$ werden wir im Folgenden eine möglichst einfache zu bestimmen suchen, und diese allein mit dem Namen Derivation und die dazu gehörige Operation mit der Bezeichnung: deriviren belegen.

Um nun diese Function $F(z,n)$ durch einen analytischen Ausdruck bestimmen zu können, müssen wir eine Eigenschaft, die dieselbe bei allen ganzen n hat, bei beliebigen n bestehen lassen, es ist dies die Eigenschaft

$$\frac{\partial}{\partial z} F(z, \pm\nu) = F(z, \pm\nu+1),$$

die man sofort aus den Reihen 1) erkennt; und ihre Verallgemeinerung für beliebige n, welche zulässig ist, da z von n unabhängig ist, lautet:

$$\frac{\partial}{\partial z} F(z,n) = F(z,n+1). \tag{2}$$

Zu dieser Gleichung, welche in Bezug auf z eine Differentialgleichung, in Bezug auf n aber eine Functionalgleichung ist, treten dann die folgenden gleichsam als Grenzgleichungen hinzu:

$$F(z,\pm\nu) = D^{\pm\nu} f(z) \tag{3}$$

wo die ν ganz, mithin die rechten Seiten bekannt sind.

Aus diesen Gleichungen 2) und 3), welche wir die Fundamentalforderungen für die Derivation nennen wollen, soll nun $F(z,n)$ bestimmt werden. Wir müssen zu diesem Zwecke vorerst jedoch, namentlich um die rechte Seite der Gleichung 3) in eine andere Form zu bringen, eine Betrachtung über gewisse Curvenintegrale einschalten.

2.

In der für ganze positive ν geltenden Formel von Cauchy

$$D^\nu f(z) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{2i\pi} \int_{K_z} \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{\nu+1}} = J(z,\nu) \tag{4}$$

ist bekanntlich der Integrationsweg K der complexen Variabelen t eine beliebige Curve, die den Punkt z einmal im positiven Sinne umläuft und keine Ausnahmepunkte der Function $f(t)$ einschliesst.

Der analoge Ausdruck für $-\nu$ an Stelle von ν ist

$$J(z,-\nu) = \frac{\Gamma(1-\nu)}{2i\pi} \int_{K_z} f(t)(t-z)^{\nu-1}\,dt. \tag{5}$$

Bezieht man hier die Variabele t auf denselben Integrationsweg K_z, so nimmt $J(z,-\nu)$ die unbestimmte Form $\infty.0$ an, und um das zu vermeiden, definiren wir

$$J(z,-\nu) = \mathrm{Lim}\left\{\frac{\Gamma(1-\nu-\delta)}{2i\pi}\int_{K_z} f(t)(t-z)^{\nu+\delta-1}dt\right\}_{(\delta=0)}.$$

Subtrahirt man davon die für beliebig kleine δ geltende Formel

$$0 = \frac{\Gamma(1-\nu-\delta)}{2i\pi}\int_{K_z} f(t)(t-z)^{\nu-1}dt,$$

so erhält man

$$J(z,-\nu) = \mathrm{Lim}\left\{\frac{\Gamma(1-\nu-\delta)}{2i\pi}\int_{K_z} f(t)\left[(t-z)^{\nu+\delta-1}-(t-z)^{\nu-1}\right]dt\right\}_{(\delta=0)}$$

und berücksichtigt man die Gleichung

$$\Gamma(1-\nu-\delta) = (-1)^{\nu}\frac{\Gamma(1-\delta)}{\delta(1+\delta)(2+\delta)\ldots(\nu-1+\delta)},$$

so ist weiter

$$J(z,-\nu) = \frac{(-1)^{\nu}}{2i\pi}\mathrm{Lim}\left\{\frac{\Gamma(1-\delta)}{(1+\delta)(2+\delta)\ldots(\nu-1+\delta)}\int_{K_z} f(t)(t-z)^{\nu-1}\frac{(t-z)^{\delta}-1}{\delta}dt\right\}_{(\delta=0)}$$

oder einfach

6) $$Jz,-\nu) = \frac{(-1)^{\nu}}{2i\pi}\cdot\frac{1}{\Gamma(\nu)}\cdot\int_{K_z} f(t)(t-z)^{\nu-1}l(t-z)dt.$$

Den Integrationsweg K_z denken wir uns nun so entstanden, dass er von einem beliebigen Punkte a ausgehend den Punkt z einmal im positiven Sinne umläuft, alle Ausnahmepunkte von $f(t)$ ausschliesst und wieder in a endigt. Der Anfangswerth der Function unter dem Integralzeichen ist demnach

$$f(a)(a-z)^{\nu-1}l(a-z),$$

der Endwerth dagegen

$$f(a)(a-z)^{\nu-1}[l(a-z)+2i\pi],$$

weil die Amplitude von $t-z$ beim Durchlaufen von K_z um 2π gewachsen ist. Der Integrationsweg K_z ist somit in der letzten Darstellung von $J(z,-\nu)$ keine geschlossene Curve.

Um nun den Ausdruck rechter Hand in 6) auszuwerthen, ersetzen wir den Integrationsweg K_z durch einen neuen Integrationsweg, der aus folgenden drei Theilen besteht:

1. aus der beliebigen geraden oder krummen Linie (az), die von a nach z führt, ohne durch einen Ausnahmepunkt von $f(t)$ zu gehen, noch einen solchen zu umwinden,
2. aus dem unendlich kleinen um z geschlagenen Kreis z_0
3. aus der von z nach a zurückführenden Curve (za).

Dann ist

$$J(z,-\nu) = \frac{(-1)^{\nu}}{2i\pi\Gamma(\nu)}\int_{(az)} f(t)(t-z)^{\nu-1}l(t-z)dt$$

$$+\frac{(-1)^{\nu}}{2i\pi\Gamma(\nu)}\int_{z_0} f(t)(t-z)^{\nu-1}l(t-z)dt$$

$$+\frac{(-1)^{\nu}}{2i\pi\Gamma(\nu)}\int_{(za)} f(t)(t-z)^{\nu-1}[l(t-z)+2i\pi]dt.$$

Im zweiten Integrale substituiren wir $t-z=\rho e^{i\varphi}$, $dt=i\rho e^{i\varphi}\,d\varphi$, wo φ von φ_0 bis $\varphi_0+2\pi$ wächst und ρ den Radius des unendlich kleinen Kreises z_0 darstellt. Für unendlich abnehmende ρ verschwindet dieses Integral; kehrt man ferner im dritten Integrale die Integrationsrichtung um, so bleibt einfach

$$J(z,-\nu)=-\frac{(-1)^\nu}{2i\pi\Gamma(\nu)}\cdot\int_{(az)} f(t)(t-z)^{\nu-1}\,.\,2i\pi.dt$$

oder endlich

$$J(z,-\nu)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\cdot\int_a^z f(t)(z-t)^{\nu-1}dt.$$

Man erkennt sofort, dass der rechter Hand auftretende Ausdruck nichts Anderes ist, als das ν-fache Integral von $f(z)$ genommen zwischen den Grenzen a und z. Bezeichnet man dieses nach der früher gemachten Bemerkung mit

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{-\nu} f(z),$$

so hat man wegen 5)

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{-\nu} f(z)=\frac{\Gamma(-\nu+1)}{2i\pi}\int_{K_z}\frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{-\nu+1}}$$

eine Formel, die der Cauchy'schen Formel 4) vollkommen analog ist. Beide Formeln lassen sich zusammenfassen in die folgende

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{\pm\nu} f(z)=\frac{\Gamma(\pm\nu+1)}{2i\pi}\int_{K_z}\frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{\pm\nu+1}} \tag{7}$$

wo ν eine ganze positive Zahl bedeutet. Gilt das obere Vorzeichen, so ist der Werth des Curvenintegrales vom Ausgangspunkte a des Integrationsweges K_z unabhängig, weil dann K_z eine geschlossene Curve ist; gilt dagegen das untere Vorzeichen, so ist, wie wir eben gesehen haben, der Werth des Curvenintegrales abhängig vom Ausgangspunkte a, weil der Integrationsweg K_z nicht mehr geschlossen ist, wenn man sich die ganze negative Zahl $-\nu$ als den Grenzwerth vorstellt, dem die beliebige Zahl $-(\nu+\delta)$ bei unendlich abnehmendem δ zustrebt.

Zufolge der Gleichung 7) ist somit die Derivation $D^n f(z)$ oder $F(z,n)$ für ganze positive und negative n derart bestimmt, dass $F(z,+\nu)$ den ν-ten Differentialquotienten von $f(z)$ und $F(z,-\nu)$ das ν-fache Integral von $f(z)$, genommen zwischen den Grenzen a und z, darstellt, was wir bei der Forderung 3) berücksichtigen wollen.

3.

Vermittelst der Gleichung 7) können wir unsere Fundamentalforderungen so aussprechen:

„Die Derivation $F(z,n)$ muss der Functionalgleichung

$$\frac{\partial}{\partial z}F(z,n)=F(z,n+1) \tag{8}$$

genügen und für ganze $n=\pm\nu$ die Grenzbedingung

$$F(z,\pm\nu)=\frac{\Gamma(\pm\nu+1)}{2i\pi}\int_{K_z}\frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{\pm\nu+1}} \tag{9}$$

erfüllen."

Um nun zum analytischen Ausdrucke für $F(z,n)$ zu gelangen, wird es unsere nächste Aufgabe sein, die Gleichung 8) zu integriren und das Integral der Bedingung 9) zu unterwerfen. Da nun 8) gleichzeitig

Functional- und Differentialgleichung ist, so wird der Weg, die vollständige Lösung von 8) direct zu finden, ein sehr schwieriger sein; wir brauchen aber für unseren Zweck die vollständige Lösung gar nicht, da wir sie ohnehin wieder specialisiren müssten, um auch die Gleichung 9) zu befriedigen. Zudem werden wir von einer directen Lösung um so lieber absehen, als sich unser Ziel sehr leicht auf indirectem Wege erreichen lässt.

Wir versuchen nämlich, ob und inwiefern der Ausdruck

$$J(z,n) = \frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi}\int\limits_{K_z}\frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}}$$

der ebenso gebildet ist, wie 4) und 5), unseren Gleichungen 8) und 9) Genüge leistet. Dass er die Gleichung 9) erfüllt, ist ohne Weiteres ersichtlich; er genügt aber auch der Gleichung 8), denn es ist

$$\frac{\partial}{\partial z}J(z,n) = \frac{\Gamma(n+2)}{2i\pi}\int\limits_{K_z}\frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+2}} = J(z,n+1),$$

da die Differentiation unter dem Integralzeichen vorgenommen werden darf, wenn wir voraussetzen, dass der Integrationsweg K_z von der früher angegebenen Beschaffenheit ist. Die Differenz

$$F(z,n)-J(z,n) = P(z,n)$$

genügt dann ebenfalls der Gleichung 8) und hat die Eigenschaft, für alle ganzen $n = \pm\nu$ zu verschwinden. Es ist somit die vollständige Lösung der beiden Gleichungen 8) und 9) einfach

$$F(z,n) = J(z,n)+P(z,n)$$

oder wegen der Bedeutung von $J(z,n)$

$$F(z,n) = \frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi}\int\limits_{K_z}\frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}}+P(z,n), \tag{10}$$

wobei $P(z,n)$ den beiden Bedingungen

$$11)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial z}P(z,n) = P(z,n+1)\\ &P(z,\pm\nu) = 0\end{aligned}\right.$$

zu genügen hat, sonst aber ganz willkürlich ist.

Wir haben somit augenscheinlich das Resultat: Solange wir blos an den Forderungen 8) und 9) festhalten, ist der analytische Ausdruck für die Derivation durch die Gleichung 10) gegeben; derselbe enthält noch die Function $P(z,n)$, welche durch die Gleichungen 11) definirt ist. Man sieht leicht ein, dass es unendlich viele solche Functionen $P(z,n)$ gibt, und es ist daher der analytische Ausdruck für die Derivation noch keineswegs bestimmt.

4.

In der Gleichung 10) tritt uns rechter Hand ein Curvenintegral entgegen, das eine nähere Betrachtung verdient, es ist dies das Curvenintegral

$$J(z,n) = \frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi}\int\limits_{K_z}\frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}}. \tag{12}$$

Zunächst bemerken wir, dass der Integrationsweg K_z, der vom Punkt a ausgehend eine Schlinge um den Punkt z bildet und wieder nach a zurückkehrt, ohne einen Ausnahmepunkt von $f(t)$ durchzulaufen oder einzuschliessen, keine geschlossene Curve ist. Denn es ist z ein Ausnahmepunkt des Integranden $\frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}$ und diese Function haben wir uns wegen ihrer Vieldeutigkeit auf unendlich vielen Riemann'schen Blättern, die sämmtlich im Punkte z (und im Unendlichen) zusammenhängen, ausgebreitet zu denken. Führen wir einen Verzweigungsschnitt von z über a, so können wir den Integrationsweg K_z stets so wählen, dass er längst seiner ganzen Ausdehnung auf ein und demselben Blatte sich befindet und wir können uns dabei für ein beliebiges Blatt entscheiden. Insoferne ist das Curvenintegral unendlich vieldeutig; doch unterscheiden sich seine sämmtlichen Werthe nur durch Factoren von der Form $e^{2ihn\pi}$, wo h eine ganze positive oder negative Zahl ist, dessen Werth abhängt von der Wahl des Blattes, auf dem wir uns bei der Integration befinden. Entscheiden wir uns ein für allemal für ein bestimmtes Blatt, etwa für dasjenige, dem der Werth $h = 0$ entspricht, so haben wir auf diese Vieldeutigkeit des Curvenintegrales nicht weiter zu achten, indem aus dem Werthe für das bestimmte Blatt $h = 0$ sogleich der Werth für ein beliebiges Blatt $h = h$ hervorgeht, wenn man mit $e^{2ihn\pi}$ multiplicirt.

Es fragt sich aber weiter, unter welchen Bedingungen für $f(t)$ und n dieses Curvenintegral überhaupt endlich ist.

In dieser Hinsicht erinnern wir an die Beschaffenheit des Integrationsweges K_z. Derselbe darf keinen Ausnahmepunkt von $f(t)$ einschliessen, ferner darf auch auf ihm längs seiner ganzen Ausdehnung kein solcher liegen. Da nun der Punkt a der Voraussetzung nach im Endlichen liegt, so hat der Integrationsweg, wie wir annehmen können, eine endliche Länge, und es kommen bei der Integration nur endliche Werthe des Integranden in Betracht; nach einem bekannten Satze ist daher dieses Curvenintegral endlich und zwar für alle Werthe von n. Wir können sogar auch im Punkte a, der den Anfang und das Ende von K_z bildet, eine Singularität der Function $f(t)$ zulassen. Um zu sehen, wie es dann mit der Endlichkeit dieses Curvenintegrales steht, zerlegen wir den Integrationsweg K_z in drei Theile, und zwar sollen, wenn b ein beliebiger endlicher, aber für $f(t)$ gewöhnlicher Punkt ist, diese drei Theile sein:

1. die Strecke $a\,b$, die im Allgemeinen nicht geradlinig zu sein braucht, aber keinen Ausnahmepunkt von $f(t)$ durch- oder umlaufen darf,

2. die Schlinge K'_z, die in b beginnend den Punkt z einmal im positiven Sinne umläuft, keinen Ausnahmepunkt von $f(t)$ einschliesst und in b wieder endigt,

3. die Strecke $b\,a$.

Man bekommt dann

$$J(z,n) = \frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi}\int_a^b \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}} + \frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi}\int_{K'_z} \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}} + \frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi e^{2i(n+1)\pi}}\int_b^a \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}}$$

oder, nach gehöriger Zusammenziehung des ersten und dritten Integrales,

$$J(z,n) = \frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi}\int_{K'_z} \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}} + \frac{1}{\Gamma(-n)}\int_a^b \frac{f(t)\,dt}{(z-t)^{n+1}}. \tag{13}$$

Da b ein gewöhnlicher Punkt der Function $f(t)$ ist, so ist das erste Integral wegen der Beschaffenheit des Integrationsweges K'_z nach dem vorhin angewandten Satze stets endlich; das zweite Integral verlangt jedoch zu seiner Endlichkeit die Bedingung

$$\mathrm{Lim}\left[(t-a)f(t)\right]_{(t=a)} = 0. \tag{14}$$

Ist diese aber erfüllt, so ist dieses Integral endlich, und zwar für alle n; daher auch der Ausdruck $J(z,n)$. Wir haben somit den Satz:

„Das Curvenintegral $J(z,n)$ ist stets endlich, wenn $f(t)$ im Punkte a die Bedingung 14) erfüllt.“

Der Punkt a kann nun in Bezug auf $f(t)$ ein Unstetigkeitspunkt von verschiedener Art sein. Verhält sich nämlich $f(t)$ in der Umgebung von a so wie $(t-a)^p$, oder $(t-a)^p[l(t-a)]^q$ u. dgl., so ist die Erfüllung der Gleichung 14) unabhängig von der Richtung, in welcher sich t gegen a annähert; im zweiten Integrale in 13) kann also dann der Integrationsweg $a\,b$ von a aus zuerst eine ganz beliebige Richtung nehmen, um dann nach b zu gelangen; daraus folgt dann, dass in $J(z,n)$ der Integrationsweg K_z, aus welchem ja die Strecke $a\,b$ entstanden ist, sowohl bei seinem Ausgange von a als auch bei seiner Rückkehr gegen a ganz beliebig orientirt sein kann. Man kann das so ausdrücken: Ist a ein Ausnahmepunkt dieser Art (wir wollen eine solche Unstetigkeit im Punkte a im Folgenden eine Unstetigkeit „erster Art" nennen), so kann — die Erfüllung der Gleichung 14) vorausgesetzt — der Integrationsweg K_z bei seinem Ausgange von a und bei seiner Rückkehr ganz beliebige Richtungen haben und $J(z,n)$ ist immer endlich und von solchen Richtungen unabhängig.

Ist dagegen in a eine Singularität von einer anderen Art (Unstetigkeit „zweiter Art", wie wir sagen wollen), so kann zwar die Gleichung 14) auch noch erfüllt sein, aber dann im Allgemeinen nur mehr für gewisse Annäherungsrichtungen von t gegen a; in 13) muss also im zweiten Integrale der Integrationsweg ab in der Nähe von a eine bestimmte Richtung haben, wenn das Integral endlich sein soll, daher wird dann der Integrationsweg K_z in $J(z,n)$ eine Curve sein müssen, die in a einen Rückkehrpunkt hat und die Richtung der Tangente in diesem Rückkehrpunkte wird eben jene Annäherungsrichtung sein, für welche 14) erfüllt ist. Man kann also sagen: Soll bei einer Unstetigkeit zweiter Art im Punkte a das Curvenintegral $J(z,n)$ endlich sein, so wird im Allgemeinen der Integrationsweg K_z im Punkte a eine Spitze bilden müssen, die sich dem Punhte a in der Richtung annähert, wie es die Gleichung 14) verlangt.

Da vermöge der Gleichung 10) die Endlichkeit der Derivation $F(z,n)$ in erster Linie von der Endlichkeit dieses eben betrachteten Curvenintegrales $J(z,n)$ abhängt, so wollen wir die Gleichung 14) die Bedingung der Derivirbarkeit nennen.

5.

Der durch 10) gegebene Ausdruck für die Derivation ist theils unendlich vieldeutig, insofern er das im vorigen Paragraphen betrachtete Curvenintegral enthält, theils ist er unbestimmt, insofern in ihm die noch nicht näher bestimmte Function $P(z,n)$ vorkommt. Die aus dem Curvenintegrale entspringende Vieldeutigkeit können wir ganz unberücksichtigt lassen, da sie keine Unbestimmtheit involvirt, daher wird die neue Forderung, die wir noch zur Bestimmung der Derivation nöthig haben, den Zweck haben, die Function $P(z,n)$ zu bestimmen. Da nun diese neue Forderung im Allgemeinen eine beliebige sein kann, so wird die Function $P(z,n)$ auch verschieden ausfallen müssen; es ist daher von der grössten Wichtigkeit, die neue Forderung so zu stellen, dass die Function $P(z,n)$ so einfach wie möglich ausfällt. Wir gelangen dazu auf folgendem Wege:

Vergleicht man die beiden Ausdrücke

$$\Phi(z,m,n) = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{m} \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} f(z) = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{m} F(z,n)$$

$$F(z,m+n) = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{m+n} f(z)$$

mit einander, so lässt sich zeigen, dass folgende Beziehung stattfindet

$$\Phi(z,\pm\mu,n) = F(z,\pm\mu+n),$$

wenn μ eine ganze positive Zahl ist. Denn es ist erstens

$$\Phi(z,+\mu,n) = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{\mu} F(z,n) = \frac{\partial^\mu}{\partial z^\mu} F(z,n);$$

nun folgt aus 8) durch wiederholte Differentiation

$$\frac{\partial^\mu}{\partial z^\mu} F(z,n) = F(z,\mu+n),$$

daher ist auch

$$\Phi(z,+\mu,n) = F(z,\mu+n).$$

Ferner ist zweitens

$$\Phi(z,-\mu,n) = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{-\mu} F(z,n) = \int_a^z{}^{\mu} F(z,n)\,dz^{\mu}, \tag{15}$$

und man überzeugt sich durch μ-malige Differentiation nach z leicht, dass die Gleichung

$$\int_a^z F(z,n)\,dz^{\mu} = F(z,n-\mu)$$

stattfindet; die vorletzte Gleichung gibt daher

$$\Phi(z,-\mu,n) = F(z,-\mu+n),$$

womit die obige Beziehung bewiesen ist. Dabei ist allerdings nicht zu übersehen, dass das Integral

$$\int_a^z{}^{\mu} f(z)\,dz^{\mu}$$

zwar einen endlichen angebbaren Werth hat, wenn wir, was immer geschehen muss, die Function $f(t)$ der Bedingung 14) unterwerfen, dass aber daraus noch nicht die Endlichkeit des in 15) vorkommenden Integrales folgt; vielmehr wird darin die Grösse n einer gewissen Beschränkung unterliegen müssen. Wir werden darauf noch ausführlicher zurückkommen.

Haben Φ und F die vorige Bedeutung, so ist, wenn m keine ganze Zahl ist, im Allgemeinen

$$\Phi(z,m,n) \gtreqless F(z,m+n).$$

Um das einzusehen, entwickeln wir jeden dieser beiden Ausdrücke nach der Formel 10), dann hat man zunächst

$$\Phi(z,m,n) = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{m} F(z,n)$$

$$= \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{m} \left\{ \frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi} \int_{K_z} \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}} + P(z,n) \right\}.$$

Nun lässt sich dieselbe Formel 10) in etwas anderen Zeichen auch schreiben

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{m} \varphi(z) = \frac{\Gamma(m+1)}{2i\pi} \int_{K_z} \frac{\varphi(u)\,du}{(u-z)^{m+1}} + Q(z,m),$$

worin dann selbstverständlich $Q(z,m)$ den beiden Bedingungen 11) zu genügen hat. Wendet man diese Gleichung auf die rechte Seite der vorletzten Gleichung an, so resultirt

$$\left.\begin{aligned} \Phi(z,m,n) = {} & \frac{\Gamma(m+1).\Gamma(n+1)}{(2i\pi)^2} \int_{K_z} \frac{du}{(u-z)^{m+1}} \cdot \int_{K_u} \frac{f(t)\,dt}{(t-u)^{n+1}} \\ & + \frac{\Gamma(m+1)}{2i\pi} \int_{K_z} \frac{P(u,n)\,du}{(u-z)^{m+1}} + Q(z,m) \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Dagegen ist nach 10) unmittelbar

$$F(z,m+n) = \frac{\Gamma(m+n+1)}{2i\pi} \int_{K_z} \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{m+n+1}} + P(z,m+n), \tag{17}$$

woraus man sofort erkennt, dass diese beiden Ausdrücke im Allgemeinen verschieden sein können, da ja namentlich P und Q von einander und von f noch unabhängig sind.

Die neue, an die Derivation zu stellende Forderung sei nun die, dass die beiden Ausdrücke 16) und 17) für beliebige m einander gleich werden, dass also

$$\Phi(z,m,n)=F(z,m+n)$$

oder

18) $$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{m}\,\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} f(z)=\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{m+n} f(z)$$

stattfinde, wobei wir jedoch darauf gefasst sind, dass n einer gewissen Bedingung wird unterliegen müssen, wie wir schon für den speciellen Fall $m=-\mu$ bemerkten.

Die Gleichung 18) ersetzen wir durch die mit ihr identische, nämlich

19) $$\frac{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n+1)}{(2i\pi)^2}\int_{K_z}\frac{du}{(u-z)^{m+1}}\int_{K_u}\frac{f(t)\,dt}{(t-u)^{n+1}}+\frac{\Gamma(m+1)}{2i\pi}\int_{K_z}\frac{P(u,n)\,du}{(u-z)^{m+1}}+Q(z,m)$$
$$=\frac{\Gamma(m+n+1)}{2i\pi}\int_{K_z}\frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{m+n+1}}+P(z,m+n),$$

und aus dieser Gleichung sollen nun die beiden Functionen P und Q bestimmt werden. Dass sich eine solche Bestimmung ausführen lässt, wird sich gleich zeigen; zu diesem Zwecke müssen wir aber vorerst einen wichtigen Satz entwickeln, der sich auf gewisse Curvenintegrale bezieht, und mit Zuhilfenahme dessen wir die fragliche Bestimmung leicht erreichen können.

6.

In dem Ausdrucke

$$\varphi(p,n)=\frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi}\int_{K_z}\frac{(t-a)^p\,dt}{(t-z)^{n+1}}$$

sei der Integrationsweg K_z von der früher angegebenen Beschaffenheit: er gehe von a aus, umlaufe z einmal im positiven Sinne, um dann wieder in a zu endigen. Man kann diesen Integrationsweg ersetzen durch folgende drei Theile:

1. durch die geradlinige Strecke ab, wo b beliebig ist,

2. durch einen von b ausgehenden, z einmal im positiven Sinne umlaufenden Zug K'_z, der auch wieder in b endigt,

3. durch die geradlinige Strecke ba.

Dann ist

$$\varphi(p,n)=\frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi}\int_a^b\frac{(t-a)^p\,dt}{(t-z)^{n+1}}+\frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi}\int_{K'_z}\frac{(t-a)^p dt}{(t-z)^{n+1}}+\frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi\,e^{2i(n+1)\pi}}\int_b^a\frac{(t-a)^p dt}{(t-z)^{n+1}},$$

oder nach gehöriger Zusammenziehung des ersten und letzten Integrales

20) $$\varphi(p,n)=\frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi}\int_{K'_z}\frac{(t-a)^p dt}{(t-z)^{n+1}}+\frac{1}{\Gamma(-n)}\cdot\int_a^b\frac{(t-a)^p dt}{(z-t)^{n+1}}.$$

Das erste Integral ist für alle Werthe von n und p endlich, das zweite jedoch nur, wenn real $(p+1)>0$ ist. Wir haben somit den Satz:

Der Ausdruck:

$$\varphi(p,n)=\frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi}\int_{K_z}\frac{(t-a)^p dt}{(t-z)^{n+1}}$$

ist stets und nur endlich, wenn real $(p+1)>0$ ist.

Man hätte diesen Satz auch sofort aus dem, was über die Endlichkeit des Ausdruckes $J(z,n)$ in 12) gesagt wurde, folgern können; in der That ist ja $\varphi(p,n)$ ein specieller Fall von $J(z,n)$, wenn nämlich $f(t)=(t-a)^p$ wird, und dann gibt die Bedingung 14)

$$\operatorname{Lim}\left[(t-a)\,.\,(t-a)^p\right]_{(t=a)}=0$$

d. h. real $(p+1)>0$.

Lässt man in 20) b nach z rücken, so kann man den Integrationsweg K'_z in einen unendlich kleinen um z geschlagenen Kreis zusammenschrumpfen lassen; man überzeugt sich leicht, dass unter der Voraussetzung real $n<0$ dieses Kreisintegral verschwindet, und dann bleibt

$$\varphi(p,n)=\frac{1}{\Gamma(-n)}\cdot\int_a^z(t-a)^p(z-t)^{-n-1}\,dt=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)}(z-a)^{p-n}$$

oder wegen der ursprünglichen Bedeutung von $\varphi(p,n)$

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi}\int_{K_z}\frac{(t-a)^p dt}{(t-z)^{n+1}}=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)}\cdot(z-a)^{p-n}\qquad \text{real}\,(p+1)>0. \tag{21}$$

Diese Gleichung gilt zunächst für den Fall real $n<0$; dass sie aber auch für beliebige n gilt, erfährt man leicht, wenn man beiderseits beliebig oft nach z differenzirt und bedenkt, dass wegen der Endlichkeit von $\varphi(p,n)$ für alle n die Differentiation linker Hand unter dem Integralzeichen vorgenommen werden darf.

Die so entstandene Gleichung 21) oder die folgende

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi}\int_{K_u}\frac{(t-a)^p dt}{(t-u)^{n+1}}=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)}(u-a)^{p-n}$$

multipliciren wir beiderseits mit $\frac{\Gamma(m+1)}{2i\pi}\frac{du}{(u-z)^{m+1}}$ und integriren nach u im Punkte a beginnend längs der Curve K_z; das gibt

$$\frac{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n+1)}{(2i\pi)^2}\int_{K_z}\frac{du}{(u-z)^{m+1}}\int_{K_u}\frac{(t-a)^p dt}{(t-u)^{n+1}}=\frac{\Gamma(m+1)\,\Gamma(p+1)}{2i\pi\,\Gamma(p-n+1)}\int_{K_z}\frac{(u-a)^{p-n}du}{(u-z)^{m+1}}.$$

Ist nun real $(p-n+1)>0$, so kann man rechter Hand die Gleichung 21) anwenden, wenn man daselbst p und n beziehungsweise durch $p-n$ und m ersetzt; man erhält so zunächst

$$=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)}\cdot\frac{\Gamma(p-n+1)}{\Gamma(p-m-n+1)}\cdot(z-a)^{p-m-n}=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-m-n+1)}(z-a)^{p-m-n};$$

hier wieder 21) anwendend, indem man n durch $m+n$ ersetzt, erhält man bei umgekehrter Anordnung

$$=\frac{\Gamma(m+n+1)}{2i\pi}\int_{K_z}\frac{(t-a)^p dt}{(t-z)^{m+n+1}};$$

somit ist schliesslich:

$$\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{(2i\pi)^2}\int_{K_z}\frac{du}{(u-z)^{m+1}}\int_{K_u}\frac{(t-a)^p dt}{(t-z)^{n+1}}=\frac{\Gamma(m+n+1)}{2i\pi}\int_{K_z}\frac{(t-a)^p dt}{(t-z)^{m+n+1}}$$

$$\text{real}\,(p+1)>0;\ \text{real}\,(p-n+1)>0.$$

Durch diese Gleichung ist ein gewisses Curvendoppelintegral auf ein einfaches Curvenintegral zurückgeführt. Man kann das Resultat verallgemeinern, wenn man beiderseits mit $\psi(p)dp$ multiplicirt, wo $\psi(p)$ eine ganz beliebige endliche und eindeutige Function von p ist und über eine beliebige Curve integrirt, jedoch so, dass stets real $(p+1)>0$ bleibt. Setzt man dann zur Abkürzung

22) $$\int (t-a)^p \psi(p)\, dp = \chi(t)$$

so hat man

23) $$\frac{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n+1)}{(2i\pi)^2}\int\limits_{K_z}\frac{du}{(u-z)^{m+1}}\cdot\int\limits_{K_u}\frac{\chi(t)\,dt}{(t-u)^{n+1}} = \frac{\Gamma(m+n+1)}{2i\pi}\int\limits_{K_z}\frac{\chi(t)\,dt}{(t-z)^{m+n+1}}.$$

Dabei ist die Function $\chi(t)$ im Allgemeinen beliebig, doch bemerkt man sehr leicht die beiden Einschränkungen

24) $$\mathrm{Lim}\,[(t-a)\,\chi(t)]_{(t=a)} = 0$$

25) $$\mathrm{Lim}\,[(t-a)^{1-n}\,\chi(t)]_{(t=a)} = 0,$$

die sich aus 22) ergeben, wenn man real $(p+1)>0$ und real $(p-n+1)>0$ berücksichtigt.

Die Bedingung 24), welche mit 14) identisch ist, verlangt, dass $\chi(t)$ derivirbar ist; das ist aber auch die einzige Bedingung für $\chi(t)$, was die Giltigkeit der Gleichung 23) anbelangt, denn die Bedingung 25) schränkt $\chi(t)$ nicht weiter ein, sondern nur die Grösse n. Wir haben also den Satz:

Zur Giltigkeit der Gleichung 23) gehört, dass $\chi(t)$ derivirbar im Punkte a ist, und dass n der Bedingung 25) Genüge leistet. m ist dagegen vollständig willkürlich.

7.

Wir kehren nun zur Gleichung 19) zurück und setzen darin neben der schon unter 14) angenommenen Bedingung der Derivirbarkeit von $f(t)$ noch für n die weitere Bedingung fest

26) $$\mathrm{Lim}\,[(t-a)^{1-n} f(t)]_{(t=a)} = 0.$$

Dann hebt sich in 19) vermöge 23) das Curvenintegral linker Hand gegen das Curvenintegral rechter Hand, und es bleibt

27) $$\frac{\Gamma(m+1)}{2i\pi}\int\limits_{K_z}\frac{P(u,n)\,du}{(u-z)^{m+1}} + Q(z,m) = P(z,m+n),$$

woraus nun P und Q zu bestimmen sind. m ist ganz beliebig, dagegen n durch die Bedingung 26) beschränkt; man sieht indess zunächst leicht ein, dass n gewiss auch einer ganzen negativen Zahl $=-\nu$ gleich sein kann. Setzt man nun in 27) $n=-\nu$, so fällt wegen 11), wonach $P(z,\pm\nu)=0$ ist, das Curvenintegral fort, und es ist

28) $$P(z,m-\nu) = Q(z,m).$$

Ersetzt man hierin m und ν beziehungsweise durch $m+1$ und $\nu+1$, so ist weiter

$$P(z,m-\nu) = Q(z,m+1),$$

also durch Vergleichung mit 28)

$$Q(z,m+1) = Q(z,m);$$

das ist wegen 11)

$$\frac{\partial}{\partial z}Q(z,m) = Q(z,m),$$

woraus durch Integration

$$Q(z,m) = \omega(m) . e^z$$

gefolgert wird. Die Integrationsconstante $\omega(m)$ muss nach 11) periodisch sein, nämlich der Functionalgleichung $\omega(m+1) = \omega(m)$ nebst der Bedingung $\omega(0) = 0$ genügen und darf z nicht enthalten. Setzt man diesen Werth von $Q(z,m)$ in die Gleichung 28), so ist

$$P(z,m-\nu) = \omega(m) e^z$$

oder, wenn man m durch $m+n+\nu$ ersetzt und wegen der Periodicität von $\omega(m)$:

$$P(z,m+n) = \omega(m+n) e^z;$$

daraus folgt noch speciell für $m = 0$

$$P(z,n) = \omega(n) e^z.$$

Trägt man die gefundenen Werthe von P und Q in die Gleichung 27) ein, so wird, wie ersichtlich

$$\frac{\Gamma(m+1)}{2i\pi} \cdot \omega(n) \int_{K_z} \frac{e^u\, du}{(u-z)^{m+1}} = [\omega(m+n) - \omega(m)] e^z.$$

Diese Gleichung ist aber nur dann möglich, wenn ω für jedes Argument verschwindet. Dann ist aber auch

$$P = Q = 0.$$

Jetzt liefert also die Gleichung 10) folgenden analytischen Ausdruck für die Derivation

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z) = \frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi} \int_{K_z} \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}}, \tag{29}$$

welcher uns für die weiteren Entwickelungen als Basis dienen wird. Die beliebige complexe Grösse n möge der Index und a die untere Grenze der Derivation genannt werden. a muss im Endlichen liegen und $f(z)$ hat der Bedingung 14) zu genügen, welche wir noch einmal anschreiben wollen

$$\operatorname{Lim} [(t-a) f(t)]_{(t=a)} = 0 \tag{30}$$

(Bedingung der Derivirbarkeit.)

Wir wollen die gewonnenen Resultate noch einmal kurz zusammenfassen:

„Unsere Derivation $\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z)$ hat folgende drei Fundamentaleigenschaften:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z} \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z) = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+1} f(z) && \text{I.}\\
&\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{-\nu} f(z) = \int_a^{z^\nu} f(z)\, dz^\nu && \text{II.}\\
&\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^m \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z) = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{m+n} f(z); \qquad \operatorname{Lim} [(t-a)^{1-n} f(t)]_{t=a} = 0 && \text{III.}
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

durch dieselben ist sie vollkommen bestimmt, und wird analytisch durch die Gleichung 29) ausgedrückt."

Die Eigenschaft

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^\nu f(z) = \frac{\partial^\nu}{\partial z^\nu} f(z)$$

d. h. die Eigenschaft der Derivation, für ganze positive Indices in Differentialquotienten überzugehen, ist nicht mit unter die Fundamentaleigenschaften aufgenommen worden, weil sie blos eine Folge von I und II ist: Differenzirt man nämlich in II beiderseits 2ν-mal nach z, so erhält man

32) $$\frac{\partial^{2\nu}}{\partial z^{2\nu}} \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{-\nu} f(z) = \frac{\partial^{\nu}}{\partial z^{\nu}} f(z);$$

andererseits folgt aber aus I durch successive Differentiation

$$\frac{\partial}{\partial z} \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} f(z) = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+1} f(z)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \overset{a}{\underset{a}{D}}{}^{n} f(z) = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+2} f(z)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial z^3} \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} f(z) = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+3} f(z)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^{2\nu}}{\partial z^{2\nu}} \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} f(z) = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+2\nu} f(z).$$

Setzt man in dieser letzten Gleichung $n = -\nu$, so hat man

$$\frac{\partial^{2\nu}}{\partial z^{2\nu}} \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{-\nu} f(z) = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{\nu} f(z),$$

woraus durch Vergleichung mit 32) unmittelbar folgt

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{\nu} f(z) = \frac{\partial^{\nu}}{\partial z^{\nu}} f(z);$$

also ist diese Eigenschaft in I und II enthalten.

Für III ist die Bemerkung wesentlich, dass darin n nicht beliebig, sondern an die angehängte Bedingung, die sich unter 25), resp. 26) einstellte, gebunden ist; m ist dagegen vollständig willkürlich.

II.

Entwicklung der wichtigsten hieher gehörigen Formeln.

1.

Nachdem wir im vorigen Capitel die Definitionsgleichung 29) für unsere Derivation aufgestellt haben, ist es vor Allem wünschenswerth, zu wissen, wie sich diese Derivation als Function von z betrachtet, in der Umgebung der unteren Grenze a verhält, welche den Anfangs- und Endpunkt des Integrationsweges K_z bildet. Um das zu erfahren, halten wir den Punkt a fest und lassen z an ihn heranrücken. Als Integrationsweg K_z in 29) wählen wir dann einen unendlich kleinen, um z geschlagenen Kreis, der natürlich durch den Punkt a gehen muss. Setzen wir demnach, wenn r der Radius dieses Kreises ist,

$$t = z + re^{i\varphi};\ a = z + re^{i\varphi_0};\ (t-a) = r(e^{i\varphi} - e^{i\varphi_0});\ dt = ire^{i\varphi}d\varphi,$$

wo φ_0 die Amplitude des Anfangsradius ist; dann haben wir nach φ zu integriren und zwar zwischen den Grenzen φ_0 und $\varphi_0 + 2\pi$. In Bezug auf $f(t)$ werden wir unterscheiden, ob a ein gewöhnlicher Punkt für $f(t)$ ist, oder ein Unstetigkeitspunkt erster Art. (Vergl. Cap. I, Paragraph 4.)

α) a ist ein gewöhnlicher Punkt für $f(t)$.

Aus 29) hat man zunächst durch Einführung der genannten Substitutionen:

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} f(z) = \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi \cdot r^{n}} \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} f(z+re^{i\varphi}) e^{-in\varphi} d\varphi.$$

Weil wir r unendlich abnehmen lassen, so können wir, da $f(t)$ in der Umgebung von a und ebenso in der Umgebung von z stetig ist, statt $f(z+re^{i\varphi})$ kurz $f(z)$ schreiben und vor das Integralzeichen stellen; führt man nun die noch übrige Integration nach φ aus, so ergibt sich nach einigen leichten Reductionen und unter Beachtung von $z-a = re^{i(\varphi_0+\pi)}$

$$\operatorname{Lim}\left[\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} f(z)\right]_{z=a} = \frac{1}{\Gamma(1-n)} \operatorname{Lim}\left[\frac{f(z)}{(z-a)^{n}}\right]_{z=a}, \tag{33}$$

oder auch

$$\operatorname{Lim}\left[\frac{(z-a)^{n}}{f(z)} \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} f(z)\right]_{z=a} = \frac{1}{\Gamma(1-n)}. \tag{34}$$

Diese Gleichung sagt aus, dass der Grenzwerth linker Hand stets, d. h. für alle n endlich bleibt.

β) a sei ein solcher Unstetigkeitspunkt von $f(t)$, dass man

$$f(t) = (t-a)^{p} f_1(t)$$

setzen kann, wo $f_1(t)$ in der Umgebung von a stetig ist. Die Bedingung der Derivirbarkeit 30) gibt für p die Bedingung

$$\text{real}\,(p+1) > 0,$$

was wir also als erfüllt voraussetzen müssen.

Man findet jetzt aus 29), wenn man beiderseits mit $\frac{(z-a)^{n-p}}{f_1(z)}$ multiplicirt, rechter Hand für $z-a$ den Werth $re^{i(\varphi_0+\pi)}$ einsetzt und unter dem Integralzeichen die Variabele φ wie vorhin einführt:

$$\frac{(z-a)^{n-p}}{f_1(z)} \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} (z-a)^{p} f_1(z) = e^{i(n-p)(\varphi_0+\pi)} \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi} \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} (e^{i\varphi} - e^{i\varphi_0})^{p} \frac{f_1(z+re^{i\varphi})}{f_1(z)} e^{-in\varphi} d\varphi.$$

Lässt man z nach a rücken und bedenkt man, dass wegen der Stetigkeit von $f_1(t)$ im Punkte a der Quotient

$$\operatorname{Lim}\left[\frac{f_1(z+re^{i\varphi})}{f_1(z)}\right]_{r=0}$$

für jeden Werth von φ der Einheit gleichkommt, so wird

$$\operatorname{Lim}\left[\frac{(z-a)^{n-p}}{f_1(z)} \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} (z-a)^{p} f_1(z)\right]_{z=a} = e^{i(n-p)(\varphi_0+\pi)} \cdot \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi} \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} (e^{i\varphi} - e^{i\varphi_0})^{p} e^{-in\varphi} d\varphi,$$

und durch Auswerthung dieses Integrales ist weiter

$$\operatorname{Lim}\left[\frac{(z-a)^{n-p}}{f_1(z)} \cdot \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} (z-a)^{p} f_1(z)\right]_{z=a} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)}.$$

Schreibt man jetzt linker Hand statt $f_1(z)$ wieder $\frac{f(z)}{(z-a)^{p}}$, so hat man schliesslich

$$\operatorname{Lim}\left[\frac{(z-a)^{n}}{f(z)} \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} f(z)\right]_{z=a} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)}; \tag{35}$$

wegen real $(p+1)>0$ ist der Grenzwerth rechter Hand ebenfalls stets endlich. Für $p=0$ kommt man auf 34) zurück.

γ) a sei ein solcher Unstetigkeitspunkt von $f(t)$, dass man setzen kann

$$f(t)=(t-a)^p[l(t-a)]^q f_1(t),$$

wo wieder $f_1(t)$ in der Umgebung von a stetig ist. Die Bedingung der Derivirbarkeit lautet hier wieder

$$\text{real}\,(p+1)>0$$

und man findet durch eine ähnliche Rechnung wie vorhin, dass der Grenzwerth

$$\text{Lim}\left[\frac{(z-a)^{n-p}}{[l(z-a)]^q f_1(z)}\cdot \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n (z-a)^p[l(z-a)]^q f_1(z)\right]_{(z=a)}$$

auch hier stets endlich ist; drückt man wieder $f_1(z)$ durch $f(z)$ aus, so kann man nämlich schreiben

36) $$\text{Lim}\left[\frac{(z-a)^n}{f(z)}\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z)\right]_{(z=a)}=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)}.$$

Die Gleichungen 34), 35) und 36) führen zu dem Ergebnisse, dass

37) $$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z)=\frac{f(z)}{(z-a)^n}E(z)$$

gesetzt werden kann, wo $E(z)$ für $z=a$ endlich bleibt, und zwar gilt eine solche Gleichung, wenn a ein gewöhnlicher Punkt oder ein Unstetigkeitspunkt erster Art von $f(t)$ ist.

Die Betrachtung der Fälle, wo im Punkte a eine Unstetigkeit zweiter Art zugelassen wird, mag unterbleiben, weil wir uns vor der Hand nur auf solche Derivationen beschränken werden, wo $f(t)$ in a blos von der ersten Art unstetig ist und weil in jenen Fällen in der That keine so einfache Gleichung wie 37) besteht.

Wir werden auch später an einigen Beispielen sehen, dass die Gleichung 37) in den Fällen, wo a ein Unstetigkeitspunkt zweiter Art ist, nicht mehr gilt.

Mit Hilfe von 37) lässt sich nun leicht die Frage beantworten, unter welchen Umständen die Derivation $\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z)$ als Function von z betrachtet, wieder derivirbar ist. Dazu gehört, wenn man in 30) z statt t und $\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z)$ statt $f(z)$ setzt, dass

$$\text{Lim}\,\left[(z-a)\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z)\right]_{(z=a)}=0$$

stattfindet. Nach 37) kann man dafür schreiben

$$\text{Lim}\,\left[(z-a)^{1-n} f(z)E(z)\right]_{(z=a)}=0$$

oder wegen der Endlichkeit von $E(z)$ im Punkte a

$$\text{Lim}\,\left[(z-a)^{1-n} f(z)\right]_{(z=a)}=0.$$

Unter dieser Bedingung ist somit die Derivation $\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z)$ wieder derivirbar, und zugleich sehen wir, dass die in 31) III geforderte Bedingung eben nichts Anderes ist, als die Bedingung für die Derivirbarkeit von $\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z)$, also die Bedingung für die Endlichkeit der Doppelderivation $\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^m \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z)$.

2.

Wir erinnern uns zunächst, das wir das Curvenintegral für die Derivation der Function $(z-a)^p$ schon ausgewerthet haben; man kann nämlich nach 21) sofort hinschreiben:

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}(z-a)^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)}\cdot(z-a)^{p-n} \qquad \text{real}(p+1)>0 \tag{38}$$

und für $p=0$ erhält man daraus die specielle Formel

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}(1) = \frac{1}{\Gamma(1-n)}\cdot\frac{1}{(z-a)^n}. \tag{39}$$

Weiter ist nach (38) auch

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\Big[(z-a)^{p+\delta}-(z-a)^p\Big] = \Big[\frac{\Gamma(p+\delta+1)}{\Gamma(p+\delta-n+1)}(z-a)^{\delta}-\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)}\Big](z-a)^{p-n},$$

und wenn man beiderseits durch δ dividirt und zur Grenze für unendlich abnehmende δ übergeht, so erhält man daraus in dem Falle, dass $p-n$ keine ganze negative Zahl ist:

$$\left.\begin{aligned}\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}(z-a)^p l(z-a) = \Big[\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)}\,l(z-a) + \frac{\partial}{\partial p}\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)}\Big](z-a)^{p-n}\\ \text{real}\,(p+1)>0;\, p-n \text{ keine ganze negative Zahl.}\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Ist $p-n$ eine ganze negative Zahl, so gilt dieses Resultat nicht mehr. Um auch für diesen Fall die betreffende Formel zu entwickeln, sei $n-p=\nu$ ganz und positiv; dann ist

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}(z-a)^p l(z-a) = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{\nu+p}(z-a)^p l(z-a) = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{\nu}\,\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{p}(z-a)^p l(z-a)$$

und man findet zunächst auf demselben Wege wie vorhin

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{p}(z-a)^p l(z-a) = \Gamma(p+1)l(z-a) + \frac{\partial}{\partial\delta}\frac{\Gamma(p+\delta+1)}{\Gamma(\delta+1)}. \qquad (\delta=0)$$

Nun ist bekanntlich

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\delta}\frac{\Gamma(p+\delta+1)}{\Gamma(\delta+1)}\right\}_{(\delta=0)} = C\Gamma(p+1)+\Gamma'(p+1),$$

wo C die Euler'sche Constante ist, nämlich

$$C = 0{\cdot}57721\ 56649\ \ldots\ ;$$

wir haben daher

$$\left.\begin{aligned}\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{p}(z-a)^p l(z-a) = \Gamma(p+1)\,[C+l(z-a)]+\Gamma'(p+1),\\ \text{real}\,(p+1)>0\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

und durch ν-malige Differenziation nach z

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{p+\nu}(z-a)^p l(z-a) = (-1)^{\nu-1}\frac{\Gamma(\nu)\Gamma(p+1)}{(z-a)^{\nu}} \qquad \text{real}\,(p+1)>0. \tag{42}$$

Selbstverständlich hätte man die Gleichungen 40), 41) und 42) auch durch directe Auswerthung des Definitionsintegrales 29) erhalten können, nur ist die Rechnung nicht so einfach. Auch die Derivation von $(z-a)^p[l(z-a)]^\nu$ lässt sich aus der Gleichung 38) vollständig entwickeln, indem man beiderseits ν-mal nach p differenzirt und linker Hand die Differenziation unter dem Derivationszeichen vornimmt.

Unterwirft man in 38) p speciell der Bedingung

$$p = n-h-1,$$

wo h eine ganze positive Zahl ist, die kleiner als real n sein muss, so ergibt sich, da die rechte Seite verschwindet:

$$\overset{z}{\underset{a}{D^n}}(z-a)^{n-h-1} = 0.$$

Hier kann h also die Werthe annehmen

$$h = 0, 1, 2, \quad . \; . \; \nu-1, \nu < \text{real}\, n,$$

während $\nu+1 \geqq \text{real}\, n$ ist. Multiplicirt man nun die vorstehende Gleichung mit einer beliebigen Constanten c_h und summirt für alle zulässigen Werthe von h, so ist

$$\overset{z}{\underset{a}{D^n}}[c_0(z-a)^{n-1}+c_1(z-a)^{n-2}+c_2(z-a)^{n-3}+ \; . \; . \; . \; +c_\nu(z-a)^{n-\nu-1}] = 0.$$

Die unter dem Derivationszeichen stehende Function möge mit $\psi(z,n)$ bezeichnet werden, also

43) $$\psi(z,n) = c_0(z-a)^{n-1}+c_1(z-a)^{n-2}+c_2(z-a)^{n-3}+ \; . \; . \; . \; +c_\nu(z-a)^{n-\nu-1};$$

dann lautet die vorhergehende Gleichung

44) $$\overset{z}{\underset{a}{D^n}}\psi(z,n) = 0 \qquad\qquad \nu+1 \geqq \text{real}\, n > \nu \geqq 0.$$

Die durch 43) definirte Function $\psi(z,n)$ möge complementäre Function genannt werden, und ihre Eigenschaft wird durch die Gleichung 44) ausgedrückt.

Wir wollen jetzt zeigen, dass $\psi(z,n)$ auch die einzige Function ist, der die Eigenschaft 44) zukommt.

Zu diesem Zwecke suchen wir alle Functionen, welche die Gleichung

$$\overset{z}{\underset{a}{D^n}}\psi(z,n) = 0$$

befriedigen. Ist ν eine ganze positive, sonst aber vorläufig noch beliebige Zahl, so kann man diese Gleichung auch schreiben

$$\overset{z}{\underset{a}{D^{\nu+1}}}\overset{z}{\underset{a}{D^{n-\nu-1}}}\psi(z,n) = 0,$$

und daraus folgt unmittelbar

$$\overset{z}{\underset{a}{D^{n-\nu-1}}}\psi(z,n) = c_0'+c_1'(z-a)+c_2'(z-a)^2+ \; . \; . \; . \; +c_\nu'(z-a)^\nu,$$

wo die Constanten c' beliebig sind. Da nun die rechte Seite derivirbar ist, so kann man zur Bestimmung von $\psi(z,n)$ aus dieser Gleichung die Fundamentaleigenschaft III anwenden, nämlich:

$$\psi(z,n) = \overset{z}{\underset{a}{D^{-n+\nu+1}}}\overset{z}{\underset{a}{D^{n-\nu-1}}}\psi(z,n)$$

$$= \overset{z}{\underset{a}{D^{-n+\nu+1}}}[c_0'+c_1'(z-a)+c_2'(z-a)^2+ \; . \; . \; . \; +c_\nu'(z-a)^\nu],$$

und wenn man gliedweise derivirt und dabei die Formeln 38) und 39) anwendet,

$$\psi(z,n)=\frac{c_0'}{\Gamma(n-\nu)}(z-a)^{n-\nu-1}+\frac{1.c_1'}{\Gamma(1+n-\nu)}(z-a)^{n-\nu}+\frac{1.2.c_2'}{\Gamma(2+n-\nu)}(z-a)^{n-\nu+1}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1.2\ldots\nu.c_\nu'}{\Gamma(n)}(z-a)^{n-1};$$

die bisher beliebige ganze positive Zahl ν bestimmt sich durch die Bemerkung, dass $\psi(z,n)$ derivirbar sein muss; dies ist der Fall, wenn real $(n-\nu)>0$ ist. Ändert man noch die Constanten c', so wird diese Gleichung identisch mit 43). Hiemit ist also bewiesen, dass die durch 43) definirte complementäre Function $\psi(z,n)$ in der That die einzige ist, die der Gleichung 44) genügt.

3.

Wir wollen jetzt die Zerlegungstheoreme entwickeln.

Es sei

$$f(z)=\varphi_1(z)+\varphi_2(z)+\ldots+\varphi_h(z);$$

dann ist nach der Definitionsgleichung 29) zunächst:

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z)=\frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi}\int_{K_z}\frac{\varphi_1(t)+\varphi_2(t)+\ldots+\varphi_h(t)}{(t-z)^{n+1}}dt$$

oder auch

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z)=\frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi}\int_{K_z}\frac{\varphi_1(t)}{(t-z)^{n+1}}dt+\frac{\Gamma(n+2)}{2i\pi}\int_{K_z}\frac{\varphi_2(t)}{(t-z)^{n+1}}dt+\ldots+\frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi}\int_{K_z}\frac{\varphi_h(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}};$$

mithin ist

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n\{\varphi_1(2)+\varphi_2(z)+\ldots+\varphi_h(z)\}=\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n\varphi_1(z)+\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n\varphi_2(z)+\ldots+\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n\varphi_h(z), \tag{45}$$

vorausgesetzt, dass sowohl die Summe $\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_h$ als auch die einzelnen Functionen $\varphi_1,\varphi_2\ldots\varphi_h$ derivirbar sind.

Der Satz 45) gilt auch für eine unendliche Reihe, wenn der Integrationsweg K_z ganz innerhalb ihres Convergenzbereiches liegt.

Ein specieller Fall von 45) ist auch die Gleichung

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n\{c+\varphi(z)\}=\frac{c}{\Gamma(1-n)(z-a)^n}+\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n\varphi(z), \tag{46}$$

wobei die Constante c nach Formel 39) derivirt wurde.

Ferner erhält man aus der Definitionsgleichung 29) für

$$f(z)=c.\varphi(z)$$

unmittelbar

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n c.\varphi(z)=c.\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n\varphi(z). \tag{47}$$

Für die Function

$$f(z)=\varphi_1(z).\varphi_2(z)$$

gibt die Definitionsgleichung zunächst

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n\varphi_1(z).\varphi_2(z)=\frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi}\int_{K_z}\frac{\varphi_1(t)\varphi_2(t)}{(t-z)^{n+1}}dt,$$

und hier können verschiedene Entwicklungen Platz greifen. Ist eine der Functionen φ, etwa φ_1 synectisch innerhalb eines um z geschlagenen Kreises, der den Punkt a einschliesst, so lässt sie sich in die Taylor'sche Reihe entwickeln, nämlich

$$\varphi_1(t) = \varphi_1(z) + \frac{t-z}{1}\varphi_1'(z) + \frac{(t-z)^2}{1\cdot 2}\varphi_1''(z) + \ldots\ldots = \sum_0^\infty {}_h \frac{(t-z)^h}{h!}\varphi_1^{(h)}(z).$$

Die Substitution gibt nun

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \varphi_1(z)\varphi_2(z) = \sum_0^\infty {}_h \frac{\varphi_1^{(h)}(z)}{h!}\cdot\frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi}\int_{K_z}\frac{\varphi_2(t)dt}{(t-z)^{n-h+1}}$$

$$= \sum_0^\infty {}_h \binom{n}{h}\varphi_1^{(h)}(z)\cdot\frac{\Gamma(n-h+1)}{2i\pi}\int_{K_z}\frac{\varphi_2(t)dt}{(t-z)^{n-h+1}}.$$

Nun ist aber

$$\frac{\Gamma(n-h+1)}{2i\pi}\int_{K_z}\frac{\varphi_2(t)dt}{(t-z)^{n-h+1}} = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-h}\varphi_2(z),$$

und die vorletzte Gleichung gibt daher

$$48)\quad \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \varphi_1(z)\cdot\varphi_2(z) = \binom{n}{0}\varphi_1(z)\cdot\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n\varphi_2(z) + \binom{n}{1}\varphi_1'(z)\,\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-1}\varphi_2(z) + \binom{n}{2}\varphi_1''(z)\,\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-2}\varphi_2(z) + \ldots\ldots;$$

und diese Entwicklung ist solange giltig, als z der Mittelpunkt eines a umschliessenden Convergenzkreises ist, innerhalb dessen $\varphi_1(t)$ convergirt.

Aus 48) wird, wenn man $\varphi_2(z) = 1$ annimmt, nach einiger Reduction, und wenn man zum Schlusse f statt φ_1 schreibt:

$$49)\quad \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z) = -\frac{1}{\Gamma(-n)}\cdot\frac{1}{(z-a)^n}\cdot\left\{\frac{f(z)}{n} - \frac{f'(z)}{n-1}\cdot\frac{z-a}{1} + \frac{f''(z)}{n-2}\cdot\frac{(z-a)^2}{1\cdot 2} - \ldots\ldots\right\}.$$

Diese Entwicklung der Derivation ist somit an die Bedingung geknüpft, dass z der Mittelpunkt eines a umschliessenden Convergenzkreises ist.

Nimmt man in 48) etwas allgemeiner $\varphi_1(z) = \varphi(z)$ und $\varphi_2(z) = (z-a)^p$, wo real$(p+1) > 0$ sein muss, so erhält man eben so leicht

$$50)\quad \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n (z-a)^p\varphi(z) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)}\cdot(z-a)^{p-n}\left\{\varphi(z) + \frac{n\varphi'(z)}{p-n+1}\cdot\frac{z-a}{1} + \frac{n(n-1)\varphi''(z)}{(p-n+1)(p-n+2)}\frac{(z-a)^2}{1\cdot 2} + \ldots\right\};$$

auch hier muss z der Mittelpunkt eines a umschliessenden Convergenzkreises sein, innerhalb dessen $\varphi(t)$ synectisch bleibt.

Sind beide Functionen φ_1 und φ_2 innerhalb des erwähnten Kreises synectisch, so kann man setzen

$$\varphi_1(t)\varphi_2(t) = \sum_0^\infty {}_h \sum_0^\infty {}_k \frac{(t-z)^{h+k}\varphi_1^{(h)}(z)\cdot\varphi_2^{(k)}(z)}{h!\,k!},$$

und die Entwicklung des Curvenintegrales gibt

$$51)\quad \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \varphi_1(z)\cdot\varphi_2(z) = \sum_0^\infty {}_h \sum_0^\infty {}_k \frac{\binom{n}{h}\binom{n-h}{k}}{\Gamma(h+k-n+1)}\,\frac{\varphi_1^{(h)}(z)\cdot\varphi_2^{(k)}(z)}{(z-a)^{n-h-k}}.$$

Die Derivation eines Productes zweier Functionen lässt sich also dann in eine Doppelsumme entwickeln.

Ist von den beiden Functionen φ_1 und φ_2 eine, etwa φ_1, synectisch innerhalb eines um a geschlagenen und z einschliessenden Kreises, so lässt sie sich in die Taylor'sche Reihe

$$\varphi_1(t) = \varphi_1(a) + \frac{t-a}{1}\varphi_1'(a) + \frac{(t-a)^2}{1\cdot 2}\varphi_1''(a) + \ldots$$

entwickeln, und man erhält dann

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}\varphi_1(z)\varphi_2(z) = \sum_0^\infty{}_h \frac{\varphi_1^{(h)}(a)}{h!}\frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi}\cdot\int_{K_z}\frac{(t-a)^h\varphi_2(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}}$$

oder auch

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n\varphi_1(z)\cdot\varphi_2(z) = \sum_0^\infty{}_h \frac{\varphi_1^{(h)}(a)}{h!}\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n(z-a)^h\varphi_2(z).$$

Die Derivation rechter Hand lässt sich nach 50) weiter entwickeln, wenn $\varphi_2(t)$ innerhalb eines um z geschlagenen und a einschliessenden Kreises synectisch bleibt; dann wird nämlich

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n\varphi_1(z)\cdot\varphi_2(z) = \sum_0^\infty{}_h\sum_0^\infty{}_k \frac{\binom{n}{k}}{\Gamma(h+k-n+1)}\cdot\frac{\varphi_1^{(h)}(a)\cdot\varphi_2^{(k)}(z)}{(z-a)^{n-h-k}}. \qquad 52)$$

Im speciellen Falle $\varphi_1(z) = 1$ und $\varphi_2(z) = f(z)$ erhält man daraus die Entwicklung 49), während der Fall $\varphi_2(z) = 1$ und $\varphi_1(z) = f(z)$ auf die Gleichung führt

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z) = \frac{1}{\Gamma(1-n)}\cdot\frac{1}{(z-a)^n}\left\{f(a) + \frac{f'(a)}{1-n}(z-a) + \frac{f''(a)}{(1-n)(2-n)}(z-a)^2 + \ldots\right\}, \qquad 53)$$

worin also a der Mittelpunkt eines z einschliessenden Convergenzkreises für $f(t)$ sein muss. Diese Entwicklung 53) ist gleichsam das Gegenstück zu 49).

Sind endlich beide Functionen φ_1 und φ_2 synectisch innerhalb eines um a geschlagenen und z einschliessenden Kreises, so dass man die Taylor'sche Entwicklung

$$\varphi_1(t)\cdot\varphi_2(t) = \sum_0^\infty{}_h\sum_0^\infty{}_k \frac{(t-a)^{h+k}\varphi_1^{(h)}(a)\cdot\varphi_2^{(k)}(a)}{h!\,k!}$$

benützen kann, so wird man auf die Formel geführt:

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n\varphi_1(z)\varphi_2(z) = \sum_0^\infty{}_h\sum_0^\infty{}_k \frac{\binom{h+k}{k}}{\Gamma(h+k-n+1)}\cdot\frac{\varphi_1^{(h)}(a)\cdot\varphi_2^{(k)}(a)}{(z-a)^{n-h-k}}, \qquad 54)$$

welche das Gegenstück zu 51) abgibt.

Gleichungen dieser Art führen zu interessanten Relationen, wie das folgende Beispiel zeigt. Entwickelt man nämlich die Derivation von e^z nach den beiden Formeln 49) und 53), so erhält man beziehungsweise

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n e^z = -\frac{1}{\Gamma(-n)}\cdot\frac{e^z}{(z-a)^n}\left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\cdot\frac{z-a}{1} + \frac{1}{n-2}\cdot\frac{(z-a)^2}{1\cdot 2} - \ldots\right\}$$

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n e^z = \frac{1}{\Gamma(1-n)}\cdot\frac{e^a}{(z-a)^n}\left\{1 + \frac{z-a}{1-n} + \frac{(z-a)^2}{(1-n)(2-n)} + \ldots\right\},$$

welche Gleichungen für jedes endliche z, a und n gelten. Setzt man die rechten Seiten einander gleich, und dann $a = 0$, so erhält man folgende Darstellung von e^z

$$e^z = \frac{\frac{1}{n} - \frac{z}{n(n-1)} + \frac{z^2}{n(n-1)(n-2)} - \frac{z^3}{n(n-1)(n-2)(n-3)} + \cdots}{\frac{1}{n} - \frac{z}{(n-1).1} + \frac{z^2}{(n-2).1.2} - \frac{z^3}{(n-3).1.2.3} + \cdots},$$

und diese Gleichung gilt für jedes n, ausgenommen, dass n eine ganze positive Zahl ist, denn es wurde im Zähler und Nenner der Factor $\Gamma(-n)$ weggelassen.

4.

Wir wollen jetzt alle auf Doppelderivationen bezügliche Sätze entwickeln und zusammenstellen.

Zunächst folgt aus 31) I durch successive Differentiation

$$\frac{\partial^\nu}{\partial z^\nu} \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z) = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+\nu} f(z),$$

welche Gleichung wir schreiben wollen:

55) $$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^\nu \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z) = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+\nu} f(z)$$

und im Vorhergehenden schon einige Male benützt haben. Hiebei ist n eine beliebige und ν eine ganze positive Zahl.

Desgleichen erhält man durch successive Benützung der Fundamentaleigenschaft 31) III:

56) $$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n_h} \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n_{h-1}} \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n_{h-2}} \cdots \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n_2} \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n_1} f(z) = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n_1+n_2+\cdots+n_{h-1}+n_h} f(z),$$

welche Gleichung giltig ist unter den Bedingungen

56 a) $$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{Lim}\left[(t-a)^{1-n_1} f(t)\right]_{(t=a)} = 0;\ \mathrm{Lim}\left[(t-a)^{1-n_1-n_2} f(t)\right]_{(t=a)} = 0; \cdots \\ &\cdots \mathrm{Lim}\left[(t-a)^{1-n_1-n_2-\cdots-n_{h-1}} f(t)\right]_{(t=a)} = 0; \end{aligned}\right.$$

nur n_h ist noch beliebig. Wir werden im folgenden Paragraphen die Darstellung der Derivation durch ein bestimmtes Integral kennen lernen; die Gleichung 56) enthält dann eine Reduction eines h-fachen Integrales auf ein einfaches, welches Resultat sich im Wesentlichen schon bei Liouville findet.

Ein specieller Fall von 56) ist die folgende Gleichung

57) $$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{-n} \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} f(z) = f(z). \qquad \mathrm{Lim}\left[(t-a)^{1-n} f(t)\right]_{(t=a)} = 0$$

Schreibt man diese Gleichungen in der Form

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{-n} F(z,n) = f(z),$$

so kann sie dazu dienen, aus einer gegebenen Derivation $F(z,n) = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} f(z)$ die Function $f(z)$ selbst zu finden, nur muss n der Zusatzbedingung 57) genügen, oder was dasselbe ist, $F(z,n)$ muss derivirbar sein, d. h. es muss

$$\mathrm{Lim}\left[(t-a) F(t,n)\right]_{(t=a)} = 0$$

stattfinden. Für den allgemeineren Fall, dass aus einer nicht derivirbaren Derivation $F(z,n)$ die ursprüngliche Function $f(z)$ hergeleitet werden soll, wo also die Gleichung

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} f(z) = F(z,n) \tag{58}$$

nach $f(z)$ aufzulösen ist, bestimme man zuerst eine ganze positive Zahl ν, welche die Gleichung

$$\mathrm{Lim}\left[(t-a)^{\nu+2} F(t,n)\right]_{(t=a)} = 0 \tag{59}$$

erfüllt. Eine solche Bestimmung ist immer möglich, denn diese Bedingung heisst in anderen Zeichen

$$\mathrm{Lim}\left[(t-a)^{\nu-n+2} f(t)\right]_{(t=a)} = 0,$$

wonach also wegen der Derivirbarkeit von $f(t)$ ν so angenommen werden kann, dass die Ungleichung

$$\nu+1 \geqq \mathrm{real}\, n > \nu$$

besteht. Die aufzulösende Gleichung 58) lässt sich nun schreiben

$$\frac{\partial^{\nu+1}}{\partial z^{\nu+1}} \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-\nu-1} f(z) = F(z,n),$$

und daraus folgt durch $(\nu+1)$-malige Integration bei beliebiger unterer Grenze — zwischen a und z ist $F(z,n)$ der Annahme nach nicht integrirbar —

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-\nu-1} f(z) = \int^{z}{}^{\nu+1} F(z,n)\, dz^{\nu+1} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_\nu (z-a)^\nu.$$

Jetzt ist die rechte Seite derivirbar, denn es ist wegen 59)

$$\mathrm{Lim}\left[(t-a)\int^{t}{}^{\nu+1} F(z,n)\, dz^{\nu+1}\right]_{(t=a)} = 0,$$

und die Anwendung von 57) auf die vorletzte Gleichung gibt

$$\left.\begin{aligned} f(z) = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{-n+\nu+1} \int^{z}{}^{\nu+1} F(z,n)\, dz^{\nu+1} + \psi(z,n) \\ \nu+1 \geqq \mathrm{real}\, n > \nu, \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

wobei $\psi(z,n)$ die complementäre Function ist.

Die Formel 57) kommt in Form eines Doppelintegrales schon in einer Abhandlung von Abel vor (Crelle's Journal 1.), der sie zur Lösung einer dynamischen Aufgabe benützt.

Behufs einer weiteren Entwicklung gehen wir von der Gleichung 13) aus, welche lautet:

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi}\int_{K_z} \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}} = \frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi}\int_{K'_z} \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}} + \frac{1}{\Gamma(-n)}\int_a^b \frac{f(t)\,dt}{(z-t)^{n+1}},$$

und worin b ein gewöhnlicher Punkt für $f(t)$ ist. Wir schreiben diese Gleichung zunächst in der Form

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} f(z) = \overset{z}{\underset{b}{D}}{}^{n} f(z) + \frac{1}{\Gamma(-n)} \cdot \int_a^b \frac{f(t)\,dt}{(z-t)^{n+1}} \tag{61}$$

und behandeln die rechter Hand vorkommende Derivation

$$\overset{z}{\underset{b}{D}}{}^{n} f(z) = \frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi}\int_{K'_z} \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}}.$$

Wir schlagen um z einen Convergenzkreis von $f(t)$ mit dem Radius R, verlegen b in die Peripherie desselben und nehmen ihn als Integrationsweg K'_z an. Dann haben wir zu setzen

$$t = z+Re^{i\varphi}; \quad b = z+Re^{i\varphi_1}; \quad dt = iRe^{i\varphi}d\varphi,$$

so dass nach φ zwischen den Grenzen φ_1 und $\varphi_1+2\pi$ zu integriren ist. Es wird dann

$$\overset{z}{\underset{b}{D}}{}^n f(z) = \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi R^n}\cdot\int_{\varphi_1}^{\varphi_1+2\pi} f(z+Re^{i\varphi})e^{-in\varphi}d\varphi.$$

Eine partielle Integration gibt weiter unter Beachtung von $Re^{i(\varphi_1+\pi)} = z-b$

$$\overset{z}{\underset{b}{D}}{}^n f(z) = \frac{1}{\Gamma(1-n)}\cdot\frac{f(b)}{(z-b)^n} + \frac{\Gamma(n)}{2\pi R^{n-1}}\int_{\varphi_1}^{\varphi_1+2\pi} f'(z+Re^{i\varphi})e^{-i(n-1)\varphi}d\varphi,$$

oder, wie ein Blick auf die vorhergehende Gleichung lehrt

$$\overset{z}{\underset{b}{D}}{}^n f(z) = \frac{1}{\Gamma(1-n)}\cdot\frac{f(b)}{(z-b)^n} + \overset{z}{\underset{b}{D}}{}^{n-1} f'(z),$$

welche Gleichungen zunächst nur für den Fall bewiesen ist, dass die untere Grenze b im Convergenzkreise von $f(t)$ liegt. Man kann sie aber leicht verallgemeinern. Drückt man nämlich die beiden hier vorkommenden Derivationen

$$\overset{z}{\underset{b}{D}}{}^n f(z) \qquad \overset{z}{\underset{b}{D}}{}^{n-1} f'(z)$$

nach 61) durch die Derivationen

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z) \qquad \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-1} f'(z)$$

aus, so erhält man

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z) - \frac{1}{\Gamma(-n)}\cdot\int_a^b \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}} = \overset{z}{\underset{b}{D}}{}^{n-1} f'(z) - \frac{1}{\Gamma(1-n)}\cdot\int_a^b \frac{f'(t)\,dt}{(t-z)^n} + \frac{1}{\Gamma(1-n)}\cdot\frac{f(b)}{(z-b)^n}.$$

Wir müssen nun $f(a)$ endlich voraussetzen, weil im Gegenfalle $f'(z)$ nicht derivirbar wäre; thun wir das, so gibt eine partielle Integration des Integrales rechter Hand und unter Beachtung von $\frac{n}{\Gamma(1-n)} = -\frac{1}{\Gamma(-n)}$

62) $$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z) = \frac{1}{\Gamma(1-n)}\cdot\frac{f(a)}{(z-a)^n} + \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-1} f'(z).$$

Die obige Gleichung gilt somit auch für solche untere Grenzen, die ausserhalb des Convergenzkreises liegen.

Diese wichtige Gleichung, die sich zuerst bei Herrn A. Grünwald findet, lässt sich auch auf folgende Weise sehr einfach herleiten:

Es ist zufolge der Fundamentaleigenschaft 31) III

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \overset{z}{\underset{v}{D}}{}^{-1} f'(z) = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-1} f'(z),$$

wenn $f'(z)$ derivirbar ist. Wegen

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{-1} f'(z) = \int_a^z f'(z)\,dz = f(z)-f(a)$$

kann man dafür schreiben

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z) = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(a) + \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-1} f'(z),$$

und wenn man die Constante $f(a)$ nach 39) derivirt, erhält man unmittelbar 62).

Setzen wir $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$, . . $f^{(\nu-1)}(a)$ endlich voraus, so gibt eine ν-malige Anwendung der Gleichung 62)

$$\left.\begin{aligned}\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z) = \frac{1}{\Gamma(1-n)}\cdot\frac{f(a)}{(z-a)^n} + \frac{1}{\Gamma(2-n)}\cdot\frac{f'(a)}{(z-a)^{n-1}} + \frac{1}{\Gamma(3-n)}\cdot\frac{f''(a)}{(z-a)^{n-2}} + \ldots\\ \ldots + \frac{1}{\Gamma(\nu-n)}\cdot\frac{f^{(\nu-1)}(a)}{(z-a)^{n-\nu+1}} + \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-\nu} f^{(\nu)}(z).\end{aligned}\right\} \quad 63)$$

Ersetzt man in dieser Gleichung n durch $n+\nu$ und $f^{(\nu)}(z)$ durch $\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^\nu f(z)$, so kann man sie auch schreiben

$$\left.\begin{aligned}\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^\nu f(z) = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+\nu} f(z) - \frac{1}{\Gamma(1-n-\nu)}\cdot\frac{f(a)}{(z-a)^{n+\nu}} - \frac{1}{\Gamma(2-n-\nu)}\cdot\frac{f'(a)}{(z-a)^{n+\nu-1}} - \ldots\\ \ldots - \frac{1}{\Gamma(-n)}\cdot\frac{f^{(\nu-1)}(a)}{(z-a)^{n+1}};\end{aligned}\right\} \quad 64)$$

und in dieser Form zeigt sie, dass die Derivationen

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^\nu f(z) \text{ und } \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+\nu} f(z) = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^\nu \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z)$$

im Allgemeinen von einander verschieden sind.

Lässt man in 62) die ganze positive Zahl ν unendlich wachsen, so muss, damit die entstehende unendliche Reihe convergire, a als Mittelpunkt eines, z umschliessenden, Convergenzkreises von $f(t)$ angenommen werden; man erhält dann genau die Reihe 53), und unter dieser Bedingung für a und z ist auch

$$\operatorname{Lim}\left[\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-\nu} f^{(\nu)}(z)\right]_{(\nu=\infty)} = 0,$$

weil ja der Rest der Reihe verschwinden muss, wenn sie convergirt.

5.

Wir gehen nun zur Darstellung der Derivation durch ein bestimmtes Integral über, wozu wir die Gleichung 61) benützen werden. Daselbst ist b ein gewöhnlicher Punkt der Function $f(t)$ und wenn wir ihn nach z rücken lassen, so wird

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z) = \operatorname{Lim}\left[\overset{z}{\underset{b}{D}}{}^n f(z)\right]_{(b=z)} + \frac{1}{\Gamma(-n)}\int_a^z \frac{f(t)\,dt}{(z-t)^{n+1}}.$$

Nun lautet die Gleichung 33), wenn man b statt a schreibt

$$\operatorname{Lim}\left[\overset{z}{\underset{b}{D}}{}^n f(z)\right]_{(b=z)} = \frac{1}{\Gamma(1-n)}\cdot\operatorname{Lim}\left[(z-b)^{-n} f(z)\right]_{(b=z)}.$$

Da nun, wie erwähnt, b ein gewöhnlicher Punkt für $f(t)$ ist, so verschwindet dieser Grenzwerth, wenn real $n<0$ angenommen wird; dann gibt die vorletzte Gleichung

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z) = \frac{1}{\Gamma(-n)}\int_a^z \frac{f(t)\,dt}{(z-t)^{n+1}}, \qquad \text{real } n<0 \quad 65)$$

und hiemit ist die Derivation durch ein bestimmtes Integral dargestellt, wenn real n negativ ist. Der Integrationsweg von a bis z braucht im Allgemeinen nicht geradlinig zu sein, darf jedoch keinen Ausnahmepunkt von $f(t)$ durch- oder umlaufen.

Um auch für einen beliebigen Index m eine analoge Darstellung zu gewinnen, zerlegen wir m in $n+\nu$, wo n von derselben Beschaffenheit ist, wie in 65) und ν ganz und positiv oder auch Null ist. Dann ist

66) $$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+\nu} f(z) = \frac{1}{\Gamma(-n)} \frac{\partial^\nu}{\partial z^\nu} \int_a^z \frac{f(t)\,dt}{(z-t)^{n+1}} \qquad \text{real } n < 0.$$

Diese Gleichungen 65) und 66) sind ebenso allgemein als die Definitionsgleichung 29) selbst, insofern nämlich auch hier $f(t)$ keiner weitern Bedingung zu unterliegen braucht, als der Bedingung der Derivirbarkeit 30). Sie kommen auch bei Herrn A. Grünwald in seiner zweiten Abhandlung so zu sagen als Definitionsgleichungen vor, nur ist dabei n unnöthiger Weise auf die Bedingung real $n \leqq -1$ beschränkt.

Wir wollen noch angeben, wie man die Gleichung 57) des vorigen Paragraphen mit Hilfe dieser Integraldarstellungen gestalten kann. Es sei

$$-1 < \text{real } n < 0.$$

Dann ist die dortige Zusatzbedingung gewiss erfüllt, wir brauchen also auf sie nicht weiter Rücksicht zu nehmen, und die erste auszuführende Derivation lässt sich unmittelbar durch das Integral 65) ausdrücken. Man hat dann

$$f(z) = \frac{1}{\Gamma(-n)} \cdot \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{-n} \int_a^z \frac{f(t)\,dt}{(z-t)^{n+1}}.$$

Da $f(z)$ derivirbar ist, so kann man diese Gleichung einmal zwischen den Grenzen a und z integriren und rechter Hand die Integration im Index der Derivation anzeigen, nämlich

$$\int_a^z f(z)\,dz = \frac{1}{\Gamma(-n)} \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{-n-1} \int_a^z \frac{f(t)\,dt}{(z-t)^{n+1}}$$

nun ist aber wegen $-1 < \text{real } n < 0$ auch $-1 < \text{real}(-1-n) < 0$, daher ist auch die andere Derivation durch das Integral 65) darstellbar; schreibt man im ersten Integrale als Integrationsvariabele u, im zweiten dagegen t, so hat man

$$\int_a^z f(z)\,dz = \frac{1}{\Gamma(-n)} \cdot \frac{1}{\Gamma(1+n)} \cdot \int_a^z \frac{dt}{(z-t)^{-n}} \int_a^t \frac{f(u)\,du}{(t-u)^{n+1}},$$

oder $f'(z)$ für $f(z)$ geschrieben

67) $$f(z) - f(a) = -\frac{\sin n\pi}{\pi} \int_a^z \frac{dt}{(z-t)^{-n}} \cdot \int_a^t \frac{f'(u)\,du}{(t-u)^{n+1}}, \qquad -1 < \text{real } n < 0$$

was die erwähnte Abel'sche Gleichung ist.

III.

Die untere Grenze liegt im Unendlichen.

1.

Wir wollen jetzt kurz noch die Derivation mit unendlicher unterer Grenze betrachten, weil einerseits dieser Fall historisch den Ausgangspunkt dieses Calculs bildete, und die Resultate sich in der That häufig sehr einfach gestalten, und weil andererseits diese Derivation eine etwas abweichende Behandlung verlangt und einige der bisherigen Sätze gewisse Modificationen erleiden.

Es bezeichne ω eine reelle positive unendlich wachsende Grösse; sei ferner zur Abkürzung der Richtungscoëffizient $e^{i\varphi_0} = \varepsilon$ gesetzt, dann sagt die Gleichung

$$a = \varepsilon . \omega$$

aus, dass die untere Grenze a der Derivation im Unendlichen liegt und zwar in einer Richtung, die mit der Richtung der Achse der positiven reellen Zahlen den Winkel φ_0 einschliesst. Der Integrationsweg K_z des Definitionsintegrales 29) wird nun zu einer unendlich langen Schlinge, die aus dem Unendlichen in der Richtung ε kommend, den Punkt z mit Ausschluss aller Ausnahmepunkte der Function $f(t)$ einmal im positiven Sinne umläuft und wieder in derselben Richtung ε ins Unendliche zurückkehrt. Wir wollen diesen Integrationsweg mit Ω_z bezeichnen. Somit hat man zunächst die Gleichung

$$\overset{z}{\underset{\varepsilon\omega}{D^n}} f(z) = \frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi} \int_{\Omega_z} \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}}. \tag{68}$$

Es fragt sich aber, ob und wann die so definirte Derivation einen bestimmten endlichen Werth besitzt. Hat man von einer gegebenen Function $f(z)$ die Derivation für die endliche untere Grenze a gebildet, und convergirt diese Derivation für $a = \varepsilon\omega$ zu einer bestimmten endlichen Grenze, dann, aber auch nur dann, wird das Curvenintegral in 68) einen bestimmten endlichen Werth besitzen: dann, und nur dann, kann man also von einer Derivation mit unendlicher unterer Grenze sprechen. Wir wollen nun sehen, wann dieses eintritt. Die Gleichung 61) liefert uns für $a = \varepsilon\omega$ und b als gewöhnlichen Punkt der Function vorausgesetzt

$$\overset{z}{\underset{\varepsilon\omega}{D^n}} f(z) = \overset{z}{\underset{b}{D^n}} f(z) + \frac{1}{\Gamma(-n)} \int_{\varepsilon\omega}^{b} \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}}. \tag{69}$$

Die rechter Hand vorkommende Derivation ist nun stets endlich, so lange b im Endlichen liegt; daher hängt die Endlichkeit der linker Hand stehenden Derivation mit der unendlichen Grenze $\varepsilon\omega$ ab von der Endlichkeit des Ausdruckes

$$T = \frac{1}{\Gamma(-n)} \int_{\varepsilon\omega}^{b} \frac{f(t)\,dt}{(z-t)^{n+1}}, \tag{70}$$

worin b ein gewöhnlicher Punkt der Function $f(t)$ ist und der Integrationsweg $\varepsilon\omega \ldots b$ keinen Ausnahmepunkt durch- oder umläuft. Wir haben somit den Satz:

„Die Derivation mit unendlicher unterer Grenze $\varepsilon\omega$ existirt dann und nur dann, wenn der Ausdruck T endlich ist."

Es lässt sich zwar kein allgemeines, aus der Beschaffenheit der Function $f(t)$ abgeleitetes Criterium aufstellen, mittelst dessen man in allen Fällen entscheiden könnte, ob der Ausdruck T endlich ist oder nicht, wohl aber lässt sich eine hinreichende Bedingung dafür angeben, nämlich:

„Für solche n, welche der Gleichung

$$\frac{f(\varepsilon\omega)}{\omega^n} = 0 \tag{71}$$

genügen, ist T, und somit auch die Derivation mit unendlicher unter Grenze $\varepsilon\omega$, stets endlich."

Man sieht schon hieraus, dass nicht für jedes n eine solche Derivation existiren wird, und das ist ein wesentlicher Unterschied zwischen einer Derivation, deren untere Grenze endlich ist und einer solchen, deren untere Grenze unendlich gross ist. Während jene Derivation für alle n endlich ist, wenn $f(t)$ der einfachen Bedingung 30) genügt, hat man hier für jeden speciellen Fall aus 70) ε und n so zu bestimmen, dass der Ausdruck T endlich bleibt und nur für solche ε und n ist dann die Derivation mit unendlicher unterer Grenze endlich.

Weiter sieht man leicht folgenden Satz ein:

„Ist die Derivation

$$\overset{z}{\underset{\varepsilon\omega}{D}}{}^n f(z)$$

endlich, so ist auch stets die folgende endlich,

$$\overset{z}{\underset{\varepsilon\omega}{D}}{}^{n'} f(z)$$

wenn real $n' >$ real n."

Denn in der That folgt aus der Endlichkeit des Ausdruckes

$$\frac{1}{\Gamma(-n)} \int_{\varepsilon\omega}^{b} \frac{f(t)\,dt}{(z-t)^{n+1}}$$

sogleich auch die Endlichkeit des Ausdruckes

$$\frac{1}{\Gamma(-n')} \int_{\varepsilon\omega}^{b} \frac{f(t)\,dt}{(z-t)^{n'+1}},$$

namentlich, wenn man sich den willkürlichen Punkt b so gewählt denkt, das längs des ganzen Integrationsweges $\varepsilon\omega\ldots b$ stets mod $(z-t) > 1$ ausfällt.

Ein specieller Fall von diesem Satze ist die Bemerkung, dass man die Gleichung 68), wenn sie für irgend ein n und ε besteht, beiderseits nach z differenziren und rechter Hand diese Operation unter dem Integralzeichen vornehmen darf, man erhält dann

$$\frac{\partial}{\partial z} \overset{z}{\underset{\varepsilon\omega}{D}}{}^n f(z) = \overset{z}{\underset{\varepsilon\omega}{D}}{}^{n+1} f(z),$$

was nichts Anderes ist, als die Fundamentaleigenschaft 31) I, die somit auch noch für unendlich grosse untere Grenzen gewahrt bleibt, wenn überhaupt die Derivation $\overset{z}{\underset{\varepsilon\omega}{D}}{}^n f(z)$ existirt.

2.

Bevor wir einen diese Derivationen mit unendlicher unterer Grenze betreffenden wichtigen Satz entwickeln, möge es gestattet sein, einige einfache Beispiele zu geben.

α) $f(z) = 1$.

Hiezu liefert 39) sofort

72) $$\overset{z}{\underset{\varepsilon\omega}{D}}{}^n (1) = 0; \qquad \text{real } n > 0$$

der Richtungscoëfficient ε ist willkürlich; für andere n existirt diese Derivation nicht.

β) $f(z) = (z-c)^p$.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Endlichkeit von T in 70) lautet hier real $(p-n) < 0$, während ε beliebig bleibt. Diese Bedingung für p und n muss also als erfüllt vorausgesetzt werden.

Behufs Entwicklung der Derivation unterscheiden wir zwei Fälle und für jeden dieser Fälle mag die Methode eine andere sein.

Erster Fall: real $(p+1) > 0$, und daher um so mehr real $(n+1) > 0$.

Hier benützen wir die Gleichung 68) und zerlegen den Integrationsweg Ω_z in folgende vier Theile:

1. in die geradlinige Strecke $\varepsilon\omega\ldots c$;

2. in den unendlich kleinen um c geschlagenen Kreis c_0, der im negativen Sinne durchlaufen werden soll;

3. in die geradlinige Strecke $c \ldots \varepsilon\omega$;

4. in den unendlich grossen um z geschlagenen Kreis.

Wegen real $(p+1)$ verschwindet das Kreisintegral, dessen Integrationsweg c_0 ist, und wegen real $(p-n) < 0$ verschwindet auch das unter 4. angegebene Kreisintegral und es bleibt

$$\overset{z}{\underset{\varepsilon\omega}{D}}{}^n (z-c)^p = \frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi} \int_{\varepsilon\omega}^{c} \frac{(t-c)^p dt}{(t-z)^{n+1}} + \frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi} . e^{-2ip\pi} \int_{c}^{\varepsilon\omega} \frac{(t-c)^p dt}{(t-z)^{n+1}}$$

$$= -e^{-ip\pi} \frac{\sin p\pi}{\pi} \Gamma(n+1) \int_{c}^{\varepsilon\omega} \frac{(t-c)^p dt}{(t-z)^{n+1}}.$$

Durch Substitution von $t = c + \varepsilon x$; $dt = \varepsilon dx$ und Anwendung einer bekannten Integralformel erhält man daraus

$$\overset{z}{\underset{\varepsilon\omega}{D}}{}^n (z-c)^p = e^{-in\pi} \frac{\Gamma(n-p)}{\Gamma(-p)} (z-c)^{p-n}. \qquad \begin{array}{l} \text{real}\,(p-n) < 0 \\ \text{real}\,(p+1) > 0. \end{array}$$

Zweiter Fall: real $n < 0$; und daher umsomehr real $p < 0$.

Hier können wir 69) anwenden und b nach z rücken lassen, wodurch die Derivation rechter Hand verschwindet, es bleibt somit

$$\overset{z}{\underset{\varepsilon\omega}{D}}{}^n (z-c)^p = \frac{1}{\Gamma(-n)} \cdot \int_{\varepsilon\omega}^{z} \frac{(t-c)^p dt}{(z-t)^{n+1}}.$$

Die Substitution $t = z + \varepsilon x$; $dt = \varepsilon dx$ gibt

$$\overset{z}{\underset{\varepsilon\omega}{D}}{}^n (z-c)^p = e^{-in\pi} . \frac{\Gamma(n-p)}{\Gamma(-p)} (z-c)^{p-n}, \qquad \begin{array}{r} \text{real}\,(p-n) < 0 \\ \text{real}\,n < 0 \end{array}$$

welches Resultat genau mit dem obigen übereinstimmt, so dass man für beide Fälle hat:

$$\overset{z}{\underset{\varepsilon\omega}{D}}{}^n (z-c)^p = e^{-in\pi} \frac{\Gamma(n-p)}{\Gamma(-p)} (z-c)^{p-n}. \qquad \text{real}\,(p-n) < 0. \tag{73}$$

Für $p = 0$ erhält man hieraus die Gleichung 72). Die Differentiation nach p gibt

$$\left.\begin{array}{l} \overset{z}{\underset{\varepsilon\omega}{D}}{}^n (z-c)^p l(z-c) = e^{-in\pi} \left[\frac{\Gamma'(-p)\,\Gamma(n-p)}{\{\Gamma(-p)\}^2} - \frac{\Gamma'(n-p)}{\Gamma(-p)} + \frac{\Gamma(n-p)}{\Gamma(-p)} l(z-c) \right] (z-c)^{p-n} \\ \text{real}\,(p-n) < 0;\ p \text{ keine ganze positive Zahl.} \end{array}\right\} \tag{74}$$

Ist aber p gleich Null oder eine ganze positive Zahl, so findet man

$$\left.\begin{array}{l} \overset{z}{\underset{\varepsilon\omega}{D}}{}^n (z-c)^p l(z-c) = (-1)^{p+1} e^{-in\pi} \Gamma(n-p) \Gamma(p+1) (z-c)^{p-n} \\ \text{real}\,(p-n) < 0; \qquad p = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{75}$$

Aus 73) kann man leicht eine complementäre Function $\psi_1(z,n)$ ableiten, für welche

$$\overset{z}{\underset{\varepsilon\omega}{D}}{}^n \psi_1(z,n) = 0, \tag{76}$$

nämlich

$$\psi_1(z,n) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_\nu z^\nu; \qquad \nu+1 \geq \text{real}\,n > \nu. \tag{77}$$

Man überzeugt sich auch hier leicht, dass $\psi_1(z,n)$ die einzige complementäre Function ist, wenn die Derivation eine unendlich grosse untere Grenze hat. Die complementären Functionen $\psi(z,n)$ in 43) und $\psi_1(z,n)$ in 77) können zu einander in die Beziehung

$$\frac{\psi(z,n)}{\psi_1(z,n)} = (z-a)^{n-\nu-1}$$

gebracht werden.

γ) $f(z) = e^{cz}$

wo c eine beliebige complexe Constante ist. Die Bedingung für die Endlichkeit der Derivation findet sich aus 70) nämlich

entweder n beliebig; real $c\varepsilon < 0$

oder real $n > -1$; real $c\varepsilon = 0$.

Für beide Fälle ergibt sich die Entwicklung der Derivation leicht aus 69), wenn man zuerst real $n < 0$ voraussetzt und b nach z rücken lässt. Man erhält dann, da die Derivation rechter Hand verschwindet:

$$\overset{z}{\underset{\varepsilon\omega}{D}}{}^n e^{cz} = \frac{1}{\Gamma(-n)} \cdot \int\limits_{\varepsilon\omega}^{z} \frac{e^{ct}\,dt}{(z-t)^{n+1}} = c^n e^{cz}.$$

Dieses Resultat gilt nun auch für solche n, deren reeller Theil positiv ist, wie man durch Differentiation leicht findet, man hat also

78) $$\overset{z}{\underset{\varepsilon\omega}{D}}{}^n e^{cz} = c^n e^{cz} \qquad \text{real } c\varepsilon < 0;\ n \text{ beliebig}$$

und

79) $$\overset{z}{\underset{\varepsilon\omega}{D}}{}^n e^{cz} = c^n e^{cz}. \qquad \text{real } c\varepsilon = 0;\ \text{real } n > -1$$

Die merkwürdige und höchst einfache Formel 78), welche für alle n gilt, wurde von Liouville zum Ausgangspunkte seiner diesbezüglichen Untersuchungen verwendet; Buchwaldt dagegen benützt die beiden Formeln 38) und 73).

Drückt man die Derivation linker Hand in 78) durch das zugehörige Curvenintegral 68) aus, so ist bei umgekehrter Anordnung der Schreibweise

$$c^n e^{cz} = \frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi} \int\limits_{\Omega_z} \frac{e^{ct}\,dt}{(t-z)^{n+1}}.$$

Für $t = z+u, dt = du$ fällt e^{cz} heraus, das Übrige lässt sich dann für $c = 1$ und $\varepsilon = -1$ so schreiben:

80) $$\frac{1}{\Gamma(n+1)} = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{\Omega_0} \frac{e^u}{u^{n+1}}\,du,$$

wobei jetzt der Integrationsweg Ω_0 von $u = -\infty$ aus den Nullpunkt einmal im positiven Sinne zu umlaufen und wieder nach $u = -\infty$ zurückzukehren hat. Die Potenz u^{n+1} ist dabei so zu nehmen, dass $1^{n+1} = 1$ ist. Die vorstehende Gleichung kann zur Definition der Function Γ benützt werden und kommt mit der bekannten Definition durch das unendliche Product vollständig überein. (Bigler, Crelle's Journal 102.)

δ) $f(z) = \cos cz$ und $f(z) = \sin cz$.

Drückt man diese Functionen durch die Exponentielle aus, so erhält man leicht unter Anwendung von 79)

$$\overset{z}{\underset{\varepsilon\omega}{D}}{}^n \cos cz = c^n \cos\left(cz + \frac{n\pi}{2}\right) \qquad \text{real } ic\varepsilon = 0;\ \text{real } n > -1 \tag{81}$$

$$\overset{z}{\underset{\varepsilon\omega}{D}}{}^n \sin cz = c^n \sin\left(cz + \frac{n\pi}{2}\right) \qquad \text{real } ic\varepsilon = 0,\ \text{real } n > -1. \tag{82}$$

3.

Die Derivation mit der unendlichen unteren Grenze $\varepsilon\omega$ lässt sich durch eine lineare Substitution in eine Derivation mit der endlichen unteren Grenze a transformiren. Zu diesem Zwecke führen wir in der Gleichung 68)

$$\overset{z}{\underset{\varepsilon\omega}{D}}{}^n f(z) = \frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi}\int\limits_{\Omega_z} \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}}$$

rechter Hand die Substitution ein

$$t = \frac{1}{\tau - a};\ dt = -\frac{d\tau}{(\tau-a)^2};\ z = \frac{1}{\zeta - a};$$

und bemerken, dass zum Werthe $t = \varepsilon\omega$ der Werth $\tau = a$ gehört, wobei jedoch τ sich so an a anzunähern hat, dass

$$\text{Lim}\ \varepsilon(\tau - a) \text{ für } \tau = a \text{ reell und positiv}$$

bleibt; einem einmaligen Umlaufe von t um z im positiven Sinne entspricht dann ebenfalls ein einmaliger Umlauf von τ um ζ im positiven Sinne; der Integrationsweg der neuen Variabelen τ wird endlich ebensowenig Ausnahmepunkte der Function $f\left(\frac{1}{\tau - a}\right)$ durch oder umlaufen, und dieser Integrationsweg wird daher wie früher mit K_ζ zu bezeichnen sein. Nach diesen Bemerkungen ist

$$\overset{z}{\underset{\varepsilon\omega}{D}}{}^n f(z) = e^{-in\pi}(\zeta - a)^{n+1}\frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi}\int\limits_{K_\zeta}\frac{(\tau-a)^{n-1} f\left(\frac{1}{\tau-a}\right)}{(\tau-\zeta)^{n+1}}\,d\tau,$$

oder

$$\overset{z}{\underset{\varepsilon\omega}{D}}{}^n f(z) = e^{-in\pi}(\zeta - a)^{n+1}\ \overset{\zeta}{\underset{a}{D}}{}^n\ (\zeta - a)^{n-1} f\left(\frac{1}{\zeta - a}\right); \qquad z = \frac{1}{\zeta - a} \tag{83}$$

womit die in Aussicht gestellte Transformation bewerkstelligt ist. Die rechter Hand stehende Derivation hat nach 30) einen endlichen Werth, wenn

$$\text{Lim}\left[(\tau - a)^n f\left(\frac{1}{\tau - a}\right)\right]_{(\tau = a)} = 0$$

ist, welche Bedingung man wegen der erwähnten Abnahme von $\tau - a$ auch schreiben kann

$$\text{Lim}\ \frac{f(\varepsilon\omega)}{\omega^n} = 0,$$

wodurch wir auf die Bedingung 71) zurückgekommen sind. Für $a=0$ und ganze positive n wird die Formel 83), wenn man noch $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\varphi(\zeta)$ setzt, mit der von S. Spitzer in dessen „Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen" (Wien 1860) angegebenen

$$\frac{d^n\varphi(\zeta)}{\left(d\frac{1}{\zeta}\right)^n}=(-1)^n\zeta^{n+1}\frac{d^n[\zeta^{n-1}\varphi(\zeta)]}{d\zeta^n}$$

identisch.

Nimmt man in 83) beispielsweise

$$f(z)=\psi_1(z,n)=c_0+c^1z+c_2z^2+\ldots+c_\nu z^\nu, \qquad \nu+1 \gtreqless \operatorname{real} n>\nu$$

so wird wegen $z=\frac{1}{\zeta-a}$

$$(\zeta-a)^{n-1}f\left(\frac{1}{\zeta-a}\right)=(\zeta-a)^{n-\nu-1}[c_\nu+c_{\nu-1}(\zeta-a)+c_{\nu-2}(\zeta-a)^2+\ldots+c_0(\zeta-a)^\nu];$$

$$=\psi(\zeta,n),$$

somit ist

$$\overset{z}{\underset{\varepsilon\omega}{D^n}}\,\psi_1(z,n)=e^{-in\pi}(\zeta-a)^{n+1}\overset{\zeta}{\underset{a}{D^n}}\,\psi(\zeta,n)=0,$$

wodurch also die Gleichung 76) aus 44) hergeleitet ist.

Die Annahme

$$f(z)=e^{cz}$$

in 83) führt vermöge 78) auf die Gleichung

84)
$$\overset{\zeta}{\underset{a}{D^n}}\,(\zeta-a)^{n-1}e^{\frac{c}{\zeta-a}}=e^{in\pi}\cdot\frac{c^n}{(\zeta-a)^{n+1}}e^{\frac{c}{\zeta-a}}.$$

Schreibt man hierin z statt ζ, und setzt zur Abkürzung

$$(z-a)^{n-1}e^{\frac{c}{z-a}}=\varphi$$
$$e^{in\pi}c^n=k,$$

so hat man

85)
$$\overset{z}{\underset{a}{D^n}}\,\varphi=\frac{k}{(z-a)^{2n}}\cdot\varphi,$$

und das ist eine lineare Differenzialgleichung von der beliebigen Ordnung n; zu ihr gehören die Particularlösungen

86)
$$\varphi=(z-a)^{n-1}e^{-\frac{\sqrt[n]{k}}{z-a}},$$

aus denen sich das allgemeine Integral linear zusammensetzt. Ist in 85) n eine rationale Zahl, so ist die Anzahl der particulären Lösungen eine endliche, weil dann $\sqrt[n]{k}$ nur eine endliche Anzahl von Werthen hat; ist aber n irrational oder complex, so hat auch 85) eine unendliche Anzahl von Particularlösungen, denn es hat dann $\sqrt[n]{k}$ unendlich viele Werthe.

Es möge hier eine Bemerkung gemacht werden, die sich auf die Gleichung 37) bezieht. Dieselbe wurde für die Fälle abgeleitet, dass a ein gewöhnlicher Punkt oder ein Unstetigkeitspunkt erster Art von $f(t)$ ist, und es wurde dort erwähnt, dass diese Gleichung nicht mehr gilt, wenn in a eine andere Unstetigkeit auftritt. Wir sehen das nun recht deutlich an der Gleichung 85), wo die Unstetigkeit in a in der That keine der dort in Betracht gezogenen ist.

4.

Mittelst der Formel 83) kann man zu jeder Derivation mit unendlicher unterer Grenze sogleich die entsprechende Derivation mit endlicher unterer Grenze hinschreiben, die ihr gleich ist und umgekehrt; eine Anwendung dieses Principes haben wir auch schon im vorigen Paragraphen gemacht, wir wollen jetzt noch eine andere Anwendung zeigen.

Zunächst wollen wir diese Formel 83) noch etwas abändern, indem wir rechter Hand

$$(\zeta-a)^{n-1} f\left(\frac{1}{\zeta-a}\right)=\varphi(\zeta)$$

einführen, wodurch linker Hand wegen $\zeta=a+\frac{1}{z}$:

$$f(z)=z^{n-1}\varphi\left(a+\frac{1}{z}\right)$$

entsteht. In der so gewonnenen Umgestaltung

$$\underset{\varepsilon\omega}{\overset{z}{D}}{}^{n}\, z^{n-1}\varphi\left(a+\frac{1}{z}\right)=e^{-in\pi}(\zeta-a)^{n+1}\underset{a}{\overset{\zeta}{D}}{}^{n}\,\varphi(\zeta) \qquad z=\frac{1}{\zeta-a}$$

schreiben wir f statt φ und vertauschen z mit ζ; dann ist bei umgekehrter Anordnung der Schreibweise

$$\underset{a}{\overset{z}{D}}{}^{n} f(z)=e^{in\pi}\zeta^{n+1}\underset{\varepsilon\omega}{\overset{\zeta}{D}}{}^{n}\,\zeta^{n-1} f\left(a+\frac{1}{\zeta}\right); \qquad \zeta=\frac{1}{z-a} \tag{87}$$

und in dieser Gestalt hat diese Gleichung den Vorzug, für alle n zu bestehen, wofern nur $f(t)$ derivirbar ist.

Verbinden wir diese Gleichung etwa mit der Gleichung 49), so ist zunächst

$$e^{in\pi}\zeta^{n+1}\underset{\varepsilon\omega}{\overset{\zeta}{D}}{}^{n}\,\zeta^{n-1} f\left(a+\frac{1}{\zeta}\right)=-\frac{1}{\Gamma(-n)}\cdot\frac{1}{(z-a)^n}\cdot\left\{\frac{f(z)}{n}-\frac{f'(z)}{n-1}\frac{z-a}{1}+\frac{f''(z)}{n-2}\frac{(z-a)^2}{1.2}-\ldots\right\}.$$

$$z=a+\frac{1}{\zeta}$$

Führt man rechter Hand die Substitution für z ein, und setzt dann $a=0$ und wieder z für ζ, so resultirt

$$\underset{\varepsilon\omega}{\overset{z}{D}}{}^{n}\, z^{n-1} f\left(\frac{1}{z}\right)=-\frac{e^{-in\pi}}{\Gamma(-n)}\cdot\left\{\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{n.z}-\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{n-1}\cdot\frac{1}{1.z^2}+\frac{f''\left(\frac{1}{z}\right)}{n-2}\frac{1}{1.2.z^3}-\ldots\right\}; \tag{88}$$

und diese Gleichung gilt für alle n, nur muss die Reihe rechter Hand convergiren.

Behufs einer weiteren Entwicklung setzen wir in 87) $f(z)=\varphi_1(z).\varphi_2(z)$, wodurch

$$\underset{a}{\overset{z}{D}}{}^{n}\,\varphi_1(z)\varphi_2(z)=e^{in\pi}\zeta^{n+1}\underset{\varepsilon\omega}{\overset{\zeta}{D}}{}^{n}\,\zeta^{n-1}\varphi_1\left(a+\frac{1}{\zeta}\right)\varphi_2\left(a+\frac{1}{\zeta}\right)$$

entsteht, und transformiren mit Hilfe dieser Gleichung und der Gleichung 87) die Gleichung 48) derart, dass wir jede der dort vorkommenden Derivationen mit der unteren Grenze a durch die entsprechende

Derivation mit der unteren Grenze $\varepsilon\omega$ ausdrücken. Es wird dann aus 48), wenn man beiderseits noch durch $e^{in\pi}\zeta^{n+1}$ dividirt

$$\underset{\varepsilon\omega}{\overset{\zeta}{D^n}}\,\zeta^{n-1}\varphi_1\left(a+\frac{1}{\zeta}\right)\varphi_2\left(a+\frac{1}{\zeta}\right)=\binom{n}{0}\varphi_1(z)\underset{\varepsilon\omega}{\overset{\zeta}{D^n}}\,\zeta^{n-1}\varphi_2\left(a+\frac{1}{\zeta}\right)$$

$$-\binom{n}{1}\varphi_1'(z)\cdot\frac{1}{\zeta}\underset{\varepsilon\omega}{\overset{\zeta}{D^{n-1}}}\,\zeta^{n-2}\varphi_2\left(a+\frac{1}{\zeta}\right)$$

$$+\binom{n}{2}\varphi_1''(z)\cdot\frac{1}{\zeta^2}\underset{\varepsilon\omega}{\overset{\zeta}{D^{n-2}}}\,\zeta^{n-3}\varphi_2\left(a+\frac{1}{\zeta}\right)$$

$$-\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$z=a+\frac{1}{\zeta}.$$

Führt man nun rechter Hand in φ_1 ebenfalls ζ ein, und setzt man dann $a=0$ und schreibt z für ζ, so ist schliesslich

$$89)\quad\left\{\begin{aligned}&\underset{\varepsilon\omega}{\overset{z}{D^n}}\,z^{n-1}\varphi_1\left(\frac{1}{z}\right)\varphi_2\left(\frac{1}{z}\right)=\binom{n}{0}\varphi_1\left(\frac{1}{z}\right)\underset{\varepsilon\omega}{\overset{z}{D^n}}\,z^{n-1}\varphi_2\left(\frac{1}{z}\right)-\binom{n}{1}\frac{\varphi_1'\left(\frac{1}{z}\right)}{z}\underset{\varepsilon\omega}{\overset{z}{D^{n-1}}}\,z^{n-2}\varphi_2\left(\frac{1}{z}\right)\\&\qquad+\binom{n}{2}\frac{\varphi_1''\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2}\underset{\varepsilon\omega}{\overset{z}{D^{n-z}}}\,z^{n-3}\varphi_2\left(\frac{1}{z}\right),\end{aligned}\right.$$

welche für alle n gilt, solange die Reihe rechter Hand convergirt, d. h. solange $\varphi_1\left(\frac{1}{z}\right)$ nach ganzen fallenden Potenzen von z entwickelbar ist. Der specielle Fall $\varphi_2=1$ führt auf 88), während der Fall $z^{n-1}\varphi_2\left(\frac{1}{z}\right)=1$ folgende Gleichung liefert

$$90)\quad\left\{\begin{aligned}&\underset{\varepsilon\omega}{\overset{z}{D^n}}\,\varphi\left(\frac{1}{z}\right)=e^{-in\pi}\cdot\frac{\Gamma(n)}{z^n}\left\{\binom{n}{1}\frac{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)}{z}+\binom{n}{2}\frac{\varphi''\left(\frac{1}{z}\right)}{1.z^2}+\binom{n}{3}\frac{\varphi'''\left(\frac{1}{z}\right)}{1.2z^3}+\cdot\cdot\right\},\\&\qquad\text{real } n>0\end{aligned}\right.$$

welche die Verallgemeinerung einer bekannten Differenzialformel ist.

IV.

Functionentheoretische Untersuchung der Derivation einzelner Functionsclassen.

1.

Wir gehen jetzt daran, die Derivation specieller Classen von Functionen zu untersuchen, um namentlich die singulären Punkte kennen zu lernen, welche dieselbe, als Function von z betrachtet, besitzt, und wir werden uns dabei fast ausschliesslich auf die Derivation mit der endlichen unteren Grenze a beschränken.

Es sei $f(z)$ eine rationale ganze Function vom Grade ν,

$$f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_\nu z^\nu=[z^\nu].$$

Dann ist

$$f^{(\nu+1)}(z)=f^{(\nu+2)}(z)=\;\ldots\;=0$$
$$f^{(\nu+1)}(a)=f^{(\nu+2)}(a)=\;\ldots\;=0.$$

Man erhält dann nach 49) oder 53), da die Reihen in diesem Falle eine endliche Gliederanzahl enthalten, sehr einfach

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} f(z) = \frac{f_1(z)}{(z-a)^n}, \tag{91}$$

wo $f_1(z)$ wieder eine rationale ganze Function vom Grade ν bezeichnet. Die Coefficienten in $f_1(z)$ werden natürlich von den Coefficienten in $f(z)$, ferner aber auch von a und n abhängen. Am leichtesten geschieht die Coefficientenbestimmung, wenn $f(z)$ in der Form

$$f(z) = c_0 + c_1 \frac{z-a}{1} + c_2 \frac{(z-a)^2}{1.2} + \ldots + c_\nu \frac{(z-a)^\nu}{1.2\ldots\nu}$$

gegeben ist, man findet dann nämlich

$$f_1(z) = \frac{c_0}{\Gamma(1-n)} + \frac{c_1}{\Gamma(2-n)}(z-a) + \frac{c_2}{\Gamma(3-n)}(z-a)^2 + \ldots + \frac{c_\nu}{\Gamma(\nu+1-n)}(z-a)^\nu.$$

Durch die Gleichung 91) ist nun das Verhalten der Derivation einer ganzen rationalen Function vollständig bestimmt, und zwar für die ganze Zahlenebene der Variabeln z, und es lässt sich folgender Satz aussprechen:

„Die Derivation einer ganzen rationalen Function vom Grade ν ist wieder eine ganze rationale Function von demselben Grade ν, dividirt durch die n-te Potenz von $z-a$. Hiebei ist n der Index der Derivation und a deren untere Grenze."

Bevor wir weiter gehen, mögen zwei Summenformeln für gewisse Reihen erwähnt werden, die sich aus der bekannten hypergeometrischen Reihe ergeben und die wir gleich in gebrauchfertige Gestalt bringen wollen.

Die hypergeometrische Reihe

$$\frac{\Gamma(r)\Gamma(r-p-q)}{\Gamma(r-p)\Gamma(r-q)} = 1 + \frac{p.q}{1.r} + \frac{p(p+1).q(q+1)}{1.2.r(r+1)} + \frac{p(p+1)(p+2)\,q(q+1)(q+2)}{1.2.3.r(r+1)(r+2)} + \ldots, \tag{92}$$

deren Giltigkeit an die Bedingung real $(r-p-q) > 0$ gebunden ist, liefert erstens, wenn man beiderseits durch q dividirt und dann $p = n+1$, $q = n+1$, $r = n+2$ setzt:

$$\left.\begin{array}{c} \Gamma(1+n)\Gamma(-n) = \dfrac{1}{n+1} + \dbinom{n+1}{1}\dfrac{1}{n+2} + \dbinom{n+2}{2}\cdot\dfrac{1}{n+3} + \ldots, \\ \text{real}\, n < 0 \end{array}\right\} \tag{93}$$

wobei linker Hand noch $\Gamma(1+n)\Gamma(-n)$ in $\dfrac{\pi}{\sin(n+1)\pi}$ umgesetzt werden könnte. Zweitens kann man 92) auch in der Form schreiben

$$\left\{\frac{\Gamma(r)\Gamma(r-p-q)}{\Gamma(r-p)\Gamma(r-q)} - 1\right\}\cdot\frac{1}{q} = \binom{p}{1}\cdot\frac{1}{r} + \binom{p+1}{2}\frac{q+1}{r(r+1)} + \binom{p+2}{3}\cdot\frac{(q+1)(q+2)}{r(r+1)(r+2)} + \ldots;$$

geht man jetzt zur Grenze für unendlich abnehmende q über, so erhält man linker Hand

$$\frac{\Gamma'(r)}{\Gamma(r)} - \frac{\Gamma'(r-p)}{\Gamma(r-p)};$$

setzt man ferner $p = n+1$, $r = 1$ und beachtet man $\dfrac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -C$, so hat man schliesslich

$$94)\left\{\begin{aligned}&-C-\frac{\Gamma'(-n)}{\Gamma(-n)}=\binom{n+1}{1}\cdot\frac{1}{1}+\binom{n+2}{2}\cdot\frac{1}{2}+\binom{n+3}{3}\cdot\frac{1}{3}+\cdots\\&\qquad\qquad\text{real}\, n<0.\end{aligned}\right.$$

C ist hier wie in 41) die Euler'sche Constante.

2.

Die Untersuchung der Derivation rationaler gebrochener Functionen beginnen wir mit dem einfachsten Falle, dass $f(z)=\frac{1}{z}$ ist. Diesen Fall werden wir eingehender behandeln, weil sich die Derivation beliebiger rationaler gebrochener Functionen darauf zurückführen lässt.

Zunächst hat man hiefür eine Entwicklung nach 49), nämlich:

$$95)\qquad \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n\frac{1}{z}=\frac{1}{\Gamma(1-n)}\cdot\frac{1}{(z-a)^n}\cdot\frac{1}{z}\left\{1+\frac{n}{n-1}\cdot\frac{z-a}{z}+\frac{n}{n-2}\left(\frac{z-a}{z}\right)^2+\frac{n}{n-3}\left(\frac{z-a}{z}\right)^3+\cdots\right\};$$

Dieselbe gilt für alle z, die der Bedingung $\operatorname{mod}(z-a)<\operatorname{mod}z$ genügen. Halbirt man den Radius vector von a durch eine unendlich lange Senkrechte, so wird durch diese die Zahlenebene in zwei Theile getheilt: die Gleichung 95) gilt nun für solche z, die in demselben Theile liegen wie a.

Eine andere Entwicklung liefert 53), wonach

$$96)\qquad \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n\frac{1}{z}=\frac{1}{\Gamma(1-n)}\cdot\frac{1}{(z-a)^n}\cdot\frac{1}{a}\left\{1-\frac{1}{1-n}\cdot\frac{z-a}{a}+\frac{1.2}{(1-n)(2-n)}\cdot\left(\frac{z-a}{a}\right)^2-\cdots\right\};$$

dieselbe gilt jedoch nur für solche z, welche die Bedingung $\operatorname{mod}(z-a)<\operatorname{mod}a$ erfüllen, was geometrisch heisst, dass z innerhalb des Kreises liegen muss, der um a mit dem Radius $\operatorname{mod}a$ beschrieben ist.

Die beiden Entwicklungen 95) und 96) decken uns von der Derivation $\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n\frac{1}{z}$ blos den singulären Punkt a auf, und beide sagen aus, dass sich diese Derivation im Punkte a in Bezug auf die Unstetigkeit so verhält wie $\frac{1}{(z-a)^n}$. (vergl. 37).

Um die fragliche Derivation auch auf anderen Partien der Zahlenebene untersuchen zu können, gehen wir aus von der Darstellung 65), dieselbe wird

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n\frac{1}{z}=\frac{1}{\Gamma(-n)}\int_a^z\frac{dt}{t(z-t)^{n+1}}\qquad \text{real}\, n<0.$$

Der Integrationsweg darf hier weder um noch durch den Nullpunkt gehen. Unter dieser Voraussetzung dürfen wir rechter Hand $t=\frac{az}{u}$; $dt=-\frac{azdu}{u^2}$ setzen, man erhält dann:

$$97)\qquad \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n\frac{1}{z}=\frac{1}{\Gamma(-n)}\cdot\frac{1}{z^{n+1}}\int_a^z\frac{u^n du}{(u-a)^{n+1}}\qquad \text{real}\, n<0.$$

Es ist nun wichtig, zu zeigen, dass eine ähnliche Gleichung auch für beliebige n gilt. Multiplicirt man nämlich die vorstehende Gleichung mit z^{n+1} und differenzirt man dann einmal nach z, so erhält man

$$z^{n+1}\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+1}\frac{1}{z}+(n+1)z^n\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n\frac{1}{z}=\frac{1}{\Gamma(-n)}\cdot\frac{z^n}{(z-a)^{n+1}}$$

oder

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+1}\frac{1}{z}+\frac{n+1}{z}\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\frac{1}{z}=\frac{1}{\Gamma(-n)}\cdot\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\cdot\frac{1}{z}. \tag{98}$$

Diese Gleichung ist zunächst noch an die Bedingung real $n<0$ gebunden; man kann aber leicht beweisen, dass sie für alle n gilt. Schreibt man sie nämlich in der Form

$$z\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+1}\frac{1}{z}+(n+1)\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\frac{1}{z}=\frac{1}{\Gamma(-n)}\cdot\frac{1}{(z-a)^{n+1}},$$

so ergibt sich daraus durch beiderseitige Differenziation nach z

$$z\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+2}\frac{1}{z}+\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+1}\frac{1}{z}+(n+1)\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+1}\frac{1}{z}=\frac{1}{\Gamma(-n-1)}\cdot\frac{1}{(z-a)^{n+2}}$$

oder

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+2}\frac{1}{z}+\frac{n+2}{z}\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+1}\frac{1}{z}=\frac{1}{\Gamma(-n-1)}\cdot\frac{1}{(z-a)^{n+2}}\cdot\frac{1}{z}.$$

Vergleicht man dies mit 98), so sieht man, dass die Gleichung 98) für $n+1$ gilt, wenn sie für n gilt. Da sie nun aber für alle n gilt, deren reeller Theil negativ ist, so gilt sie auch für beliebige n. Schreibt man in 98) statt $\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\frac{1}{z}$ etwa $\varphi(z)$, so ist

$$\frac{d\varphi(z)}{dz}+\frac{n+1}{z}\cdot\varphi(z)=\frac{1}{\Gamma(-n)}\cdot\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\cdot\frac{1}{z};$$

und das ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung, welcher $\varphi(z)=\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\frac{1}{z}$ als Function von z betrachtet genügen muss. Man erhält daher durch Integration dieser Differentialgleichung

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\frac{1}{z}=\frac{1}{\Gamma(-n)}\cdot\frac{1}{z^{n+1}}\left\{c+\int\frac{z^{n}dz}{(z-a)^{n+1}}\right\} \tag{99}$$

In dem hier vorkommenden Integrale lassen wir die untere Grenze unbestimmt, um in jedem speciellen Falle die beste Wahl treffen zu können; die von z unabhängige Constante c, die im Allgemeinen eine Function von n und a sein wird, bleibt daher auch noch bis auf Weiteres unbestimmt. Unterwirft man n z. B. der Bedingung real $n<0$, so hat man, da für diesen Fall nach 37)

$$\operatorname{Lim}\left\{\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\frac{1}{z}\right\}_{(z=a)}=0$$

wird, der Constanten c den Werth Null zu ertheilen und als untere Integrationsgrenze a zu nehmen; dann ist man aber genau auf 97) zurückgekommen, wovon somit 99) die Verallgemeinerung für beliebige n ist.

Wir wollen nun die Gleichung 99) auf verschiedene Weisen weiter entwickeln.

Schreibt man das darin vorkommende Integral in der Form

$$\int\left(1-\frac{a}{z}\right)^{-n-1}\frac{dz}{z},$$

so kann man unter der Voraussetzung mod $z>$ mod a das Binom entwickeln und gliedweise integriren; man erhält dann

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\frac{1}{z}=\frac{1}{\Gamma(-n)}\cdot\frac{1}{z^{n+1}}\left\{c+lz-\binom{n+1}{1}\cdot\frac{a}{1.z}-\binom{n+2}{2}\frac{1}{2}\cdot\frac{a^{2}}{z^{2}}-\binom{n+3}{3}\frac{1}{3}\cdot\frac{a^{3}}{z^{3}}-\ldots\right\}.$$

Um die Constante c zu bestimmen, setzen wir $z = a$ und real $n < 0$, wodurch die linke Seite verschwindet; das gibt

$$o = c + la - \binom{n+1}{1} \cdot \frac{1}{1} - \binom{n+2}{2} \cdot \frac{1}{2} - \binom{n+3}{3} \cdot \frac{1}{3} - \cdots$$

Die hier vorkommende Reihe rechter Hand convergirt in der That für real $n < 0$ und ihre Summe ist aus 94) bekannt; es ist daher

$$0 = -C - \frac{\Gamma'(-n)}{\Gamma(-n)} - la;$$

so dass jetzt wird

$$100)\quad \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{z} = -\frac{1}{z^{n+1}} \left\{ \frac{C}{\Gamma(-n)} + \frac{\Gamma'(-n)}{[\Gamma(-n)]^2} - \frac{lz - la}{\Gamma(-n)} \right\} - \frac{1}{\Gamma(-n)} \cdot \frac{1}{z^{n+1}} \left\{ \binom{n+1}{1} \frac{a}{1 \cdot z} + \binom{n+2}{2} \frac{a^2}{2 \cdot z^2} + \cdots \right\}$$

für alle z, die der Bedingung mod $z <$ mod a genügen. Der Index n ist zwar noch an die Bedingung real $n < 0$ gebunden, allein man überzeugt sich durch Differenziation nach z leicht, dass die Gleichung 100) auch für $n+1$ gilt, wenn sie für n gilt; sie gilt daher für alle n. Die Gleichung 100), welche für alle z gilt, die ausserhalb des Kreises liegen, der um den Nullpunkt mit dem Radius mod a beschrieben ist, lehrt zweierlei. Einmal zeigt sie uns das Verhalten der Derivation $\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{z}$ im Unendlichen, wonach sich dieselbe für unendliche z so verhält, wie

$$\frac{lz}{z^{n+1}}$$

(abgesehen, von dem Fall ganzer positiver n); zweitens sieht man, dass diese Derivation eine unendlich vieldeutige Function von z ist. Lässt man nämlich z etwa die Peripherie eines Kreises, dessen Radius grösser als mod a ist, h mal umlaufen, so erlangt diese Derivation nach diesen Umläufen wieder denselben Werth multiplicirt mit $e^{-2ihn\pi}$, und ausserdem noch das additive Glied $\frac{e^{-2ihn\pi}}{\Gamma(-n)} \cdot \frac{2ih\pi}{z^{n+1}}$. Die ganze Zahl h kann positiv oder negativ sein. Man kann das so ausdrücken, dass man sagt, die Function

$$\Gamma(-n)\, z^{n+1} \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{z}$$

ist ebenso vieldeutig wie lz; man kann es aber auch auf folgende Weise ausdrücken: Bezeichnet man, wie bisher, die eindeutig genommene Derivation mit D^n, dagegen den allgemeinsten Werth derselben von nun an mit $\{D^n\}$, so hat man folgende Gleichung

$$101)\qquad \left\{ \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{z} \right\} = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{z} + \frac{2ih\pi}{\Gamma(-n)\, z^{n+1}}$$

wenn man nach den Grundsätzen des Paragraphen 4, Capitel I vom Factor $e^{-2ihn\pi}$ absieht.

Die vorstehende Gleichung geht für $n = -1$ in das bekannte Resultat von der unendlichen Vieldeutigkeit der Function Lz über, nämlich

$$L\frac{z}{a} = l\frac{z}{a} + 2ih\pi,$$

wenn mit L der allgemeine Logarithmus bezeichnet wird.

Wir bemerken noch, dass die in 100) vorkommende Reihe für ganze negative n eine geschlossene wird, und daher für alle z gilt.

Behufs einer anderen Entwicklung von 99) schreiben wir das dort vorkommende Integral in der Form

$$\frac{1}{(-a)^{n+1}}\cdot\int z^n\left(1-\frac{z}{a}\right)^{-n-1}dz.$$

Ist $\operatorname{mod} z < \operatorname{mod} a$, so kann man wieder binomisch entwickeln und gliederweise integriren, was auf die Formel führt

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n\,\frac{1}{z} = \frac{c}{\Gamma(-n)\,z^{n+1}} + \frac{1}{\Gamma(-n).(-a)^{n+1}}\left\{\frac{1}{n+1} + \binom{n+1}{1}\frac{1}{(n+2)\,a} + \binom{n+2}{2}\frac{z^2}{(n+3)\,a^2} + \cdots\right\},$$

vorausgesetzt, dass n keine ganze negative Zahl ist. Die Bestimmung der Constanten c geschieht auf ähnliche Weise, wie vorhin; man hat die Formel 93) zu benützen und erhält

$$c = (-1)^n\Gamma(1+n)\,\Gamma(-n),$$

wodurch wird

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n\,\frac{1}{z} = (-1)^n\left[\frac{\Gamma(n+1)}{z^{n+1}} - \frac{1}{\Gamma(-n)}\cdot\frac{1}{a^{n+1}}\left\{\frac{1}{n+1} + \binom{n+1}{1}\frac{z}{(n+2)\,a} + \binom{n+2}{2}\frac{z^2}{(n+3)\,a^2} + \cdots\right\}\right], \qquad 102)$$

welche Gleichung unter der doppelten Voraussetzung gilt, dass $\operatorname{mod} z < \operatorname{mod} a$ und n keine negative ganze Zahl ist. Die Modification für den Fall negativer ganzer n können wir übergehen, weil wir damit nur auf 100) kommen würden.

Der Gleichung 102) zufolge verhält sich die Derivation $\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n\,\frac{1}{z}$ im Nullpunkte wie

$$\frac{1}{z^{n+1}},$$

abgesehen vom Falle ganzer negativer $n = -\nu$, wo ihr Verhalten nach 100) durch

$$z^{\nu-1}\,l z$$

charakterisirt ist.

Die Gleichungen 100) und 102) ergänzen sich gegenseitig in Bezug auf den Spielraum der Variabelen z, und insofern ist nun die Derivation $\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n\,\frac{1}{z}$ für alle z entwickelt: ausgenommen hievon sind nur solche z, die auf der Peripherie des Kreises liegen, der um den Nullpunkt mit dem Radius $\operatorname{mod} a$ beschrieben ist, weil da die in 100) und 102) vorkommenden Reihen im Allgemeinen divergiren, wenn n beliebig ist.

Wir wollen jetzt noch zwei Entwicklungen herleiten, welche die Gleichungen 95) und 96) ergänzen. Zu diesem Zwecke führen wir in dem Integrale in 99) $\frac{z}{z-a} = u$ ein, nämlich

$$\int\left(\frac{z}{z-a}\right)^{n+1}\frac{dz}{z} = \int\frac{u^n\,du}{1-u}.$$

Ist nun $\operatorname{mod} u < 1$ also $\operatorname{mod} z < \operatorname{mod}(z-a)$, so hat man durch Entwicklung rechter Hand und gliedweise Integration, und wenn man wieder $u = \frac{z}{z-a}$ restituirt:

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n\,\frac{1}{z} = \frac{c}{\Gamma(-n)\,z^{n+1}} + \frac{1}{\Gamma(-n)}\cdot\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\left\{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\,\frac{z}{z-a} + \frac{1}{n+3}\left(\frac{z}{z-a}\right)^2 + \cdots\right\};$$

vorausgesetzt, dass n keine ganze negative Zahl ist. Die Bestimmung der Constanten c ergibt sich auf die Weise, dass man $z = o$ setzt und mit 102) vergleicht; man findet

$$c = (-1)^n\Gamma(1+n)\,\Gamma(-n);$$

daher

103) $$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{z} = (-1)^n \frac{\Gamma(1+n)}{z^{n+1}} + \frac{1}{\Gamma(-n)} \cdot \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \left\{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \cdot \frac{z}{z-a} + \frac{1}{n+3}\left(\frac{z}{z-a}\right)^2 + \ldots\right\}.$$

Diese Gleichung, welche die Entwicklung 95) ergänzt, hört natürlich auf zu bestehen, wenn n negativ und ganz ist.

Ferner ist in 99), wenn man $\frac{a}{z-a} = u$ setzt:

$$\int\left(\frac{z}{z-a}\right)^{n+1} \frac{dz}{z} = \int\left(1+\frac{a}{z-a}\right)^{n+1} \frac{dz}{z} = -\int(1+u)^n \frac{du}{u}.$$

Nimmt man hier $\operatorname{mod} u < 1$, also $\operatorname{mod}(z-a) > \operatorname{mod} a$, so kann man wieder binomisch entwickeln und gliedweise integriren; setzt man dann wieder für u seinen Werth $\frac{a}{z-a}$, so hat man

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{z} = \frac{c}{\Gamma(-n)} \cdot \frac{1}{z^{n+1}} - \frac{1}{\Gamma(-n)} \frac{1}{z^{n+1}} \left\{ l \frac{a}{z-a} + \binom{n}{1} \frac{a}{1.(z-a)} + \binom{n}{2} \frac{a^2}{2.(z-a)^2} + \ldots\right\},$$

die Constante c kann man aus 100) bestimmen, indem man $z = \infty$ setzt; man findet

$$c = -C - \frac{\Gamma'(-n)}{\Gamma(-n)},$$

und hat somit

104) $$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{z} = -\frac{1}{z^{n+1}} \left\{\frac{C}{\Gamma(-n)} + \frac{\Gamma'(-n)}{[\Gamma(-n)]^2}\right\} - \frac{1}{\Gamma(-n)} \cdot \frac{1}{z^{n+1}} \left\{ l \frac{a}{z-a} + \binom{n}{1} \frac{a}{1.(z-a)} + \binom{n}{2} \frac{a^2}{2.(z-a)^2} + \ldots\right\},$$

welche Gleichung mit 96) zusammen die Derivation für alle z liefert.

Wir können das Resultat der bisherigen Untersuchung in folgenden Satz zusammenfassen:

„Die Derivation von $\frac{1}{z}$, als Function von z betrachtet, ist in der ganzen Zahlenebene endlich und stetig, bis auf die drei Ausnahmepunkte $z = 0$, $z = a$ und $z = \infty$, wo Verzweigungen auftreten. Sieht man von der Verzweigung in a ab, so ist der allgemeinste Werth dieser Derivation, wenn der Nullpunkt h-mal (oder der unendlich ferne Punkt $-h$-mal) im positiven Sinne umlaufen wird:

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{z} + \frac{2ih\pi}{\Gamma(-n)\, z^{n+1}}.$$

Die Verzweigungsart in a ist in der Gleichung 37) enthalten."

3.

Die vorigen Entwicklungen dienen auch dazu, die Derivation von $\frac{1}{z^{\lambda+1}}$, wo λ positiv und ganz ist, vollständig zu untersuchen.

Man hat nach 64) wenn man λ statt ν schreibt:

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \overset{n}{\underset{a}{D}}{}^\lambda f(z) = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+\lambda} f(z) - \frac{1}{\Gamma(1-n-\lambda)} \cdot \frac{f(a)}{(z-a)^{n+\lambda}} - \frac{1}{\Gamma(2-n-\lambda)} \cdot \frac{f'(a)}{(z-a)^{n+\lambda-1}} - \ldots - \frac{1}{\Gamma(-n)} \cdot \frac{f^{(\lambda-1)}(a)}{(z-a)^{n+1}},$$

und wenn man darin $f(z) = \frac{1}{z}$ setzt und beiderseits mit $\frac{(-1)^\lambda}{\Gamma(1+\lambda)}$ multiplizirt:

$$\left.\begin{aligned} \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{z^{\lambda+1}} = \frac{(-1)^\lambda}{\Gamma(1+\lambda)} \cdot \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+\lambda} \frac{1}{z} - \frac{(-1)^\lambda}{\Gamma(1+\lambda)\,\Gamma(1-n-\lambda)} \cdot \frac{1}{(z-a)^{n+\lambda}} \cdot \frac{1}{a}\Big[1 - \frac{1}{1-n-\lambda}\,\frac{z-a}{a} + \\ + \frac{1.2}{(1-n-\lambda)(2-n-\lambda)}\left(\frac{z-a}{a}\right)^2 - \ldots + \frac{(-1)^{\lambda-1}.1.2..(\lambda-1)}{(1-n-\lambda)(2-n-\lambda)\ldots(-n-1)} \cdot \left(\frac{z-a}{a}\right)^{\lambda-1}\Big], \end{aligned}\right\} \tag{105}$$

welche Gleichung für jedes n und positive ganze λ gilt, mag z wo immer liegen.

Durch die Gleichung 105) ist somit die Derivation $\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{z^{\lambda+1}}$ auf die bereits untersuchte Derivation $\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+\lambda} \frac{1}{z}$ zurückgeführt, und es sagt diese Gleichung unter Anderem aus, dass die Derivation $\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{z^{\lambda+1}}$ als Function von z betrachtet, ebenfalls durchaus endlich und stetig ist mit Ausnahme der drei Punkte $z = 0$, $z = a$ und $z = \infty$, wo Verzweigungen auftreten. Der allgemeine Werth dieser Derivation ist

$$\left\{\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{z^{\lambda+1}}\right\} = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{z^{\lambda+1}} + \frac{(-1)^\lambda.2ih\pi}{\Gamma(1+\lambda)\,\Gamma(-n-\lambda)} \cdot \frac{1}{z^{n+\lambda+1}}, \tag{106}$$

wenn der Nullpunkt h-mal umlaufen wird.

Selbstverständlich kann man die Untersuchung der Derivation $\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{z^{\lambda+1}}$ auch unabhängig von der Betrachtung der Derivation $\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+\lambda} \frac{1}{z}$ durchführen; man stellt zunächst die Differentialgleichung

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+1} \frac{1}{z^{\lambda+1}} + \frac{n+\lambda+1}{z} \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{z^{\lambda+1}} = \frac{1}{\Gamma(-n)(z-a)^{n+1}.z.a^\lambda} \tag{107}$$

auf, die für alle n gilt, und aus welcher durch Integration folgt:

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{z^{\lambda+1}} = \frac{1}{\Gamma(-n)\,z^{\lambda+n+1}} \cdot \frac{1}{a^\lambda} \cdot \left\{c + \int \frac{z^{n+\lambda}}{(z-a)^{n+1}}\,dz\right\}; \tag{108}$$

die Bestimmung der Constanten c, kann man etwa dadurch bewerkstelligen, dass man wieder, wie oben, gewisse hypergeometrische Reihen benützt.

Wir betrachten jetzt die Derivation von $\frac{1}{z-c}$, wobei c natürlich nicht mit a zusammenfallen soll. Man hat für diesen Fall nach 65)

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{z-c} = \frac{1}{\Gamma(-n)} \int_a^z \frac{dt}{(t-c)(z-t)^{n+1}} \qquad \text{real } n < 0.$$

Substituirt man hier $t-c = \frac{(a-c)(z-c)}{u-c}$, wodurch $z-t = \frac{(z-c)(u-a)}{u-c}$ und $\frac{dt}{t-c} = -\frac{du}{u-c}$ wird, so hat man

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{z-c} = \frac{1}{\Gamma(-n)} \cdot \frac{1}{(z-c)^{n+1}} \int_a^z \frac{(u-c)^n}{(u-a)^{n+1}}\,du \qquad \text{real } n < 0.$$

Man leitet hieraus ohne Mühe die für alle n geltende Differentialgleichung:

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+1} \frac{1}{z-c} + \frac{n+1}{z-c} \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{z-c} = \frac{1}{\Gamma(-n)(z-a)^{n+1}.(z-c)} \tag{109}$$

und daraus wieder das Integral

$$110)\qquad \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\,\frac{1}{z-c}=\frac{1}{\Gamma(-n)}\cdot\frac{1}{(z-c)^{n+1}}\cdot\left\{c'+\int\frac{(z-c)^{n}dz}{(z-a)^{n+1}}\right\}$$

ab. Ein Blick auf die Gleichung 99) lehrt uns jetzt, dass man die Derivation $\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\,\frac{1}{z-c}$ aus der Derivation $\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\,\frac{1}{z}$ sofort erhält, wenn man in letzterer z und a beziehungsweise durch $z-c$ und $a-c$ ersetzt. Wir könnten demnach sofort sechs Reihenentwicklungen für diese Derivation hinschreiben, die sich folgeweise aus 95), 96), 100), 102), 103) und 104) durch diese Substitutionen für z und a ergeben. Die Derivation $\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\,\frac{1}{z-c}$ als Function von z betrachtet, ist überall endlich und stetig, hat aber die drei Verzweigungspunkte $z=c$, $z=a$ und $z=\infty$. Durch h-malige Umläufe von z um c ensteht der allgemeinste Werth:

$$111)\qquad \left\{\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\,\frac{1}{z-c}\right\}=\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\,\frac{1}{z-c}+\frac{2ih\pi}{\Gamma(-n)\,(z-c)^{n+1}},$$

wenn wir wieder von der Verzweigung in a absehen.

Ebenso einfach erledigt sich schliesslich die Betrachtung der Derivation von $\frac{1}{(z-c)^{\lambda+1}}$. Man hat zunächst dafür eine der Gleichung 105) analoge Gleichung

$$112)\qquad \left\{\begin{aligned}\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\,\frac{1}{(z-c)^{\lambda+1}}&=\frac{(-1)^{\lambda}}{\Gamma(1+\lambda)}\,\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+\lambda}\,\frac{1}{z-c}-\frac{(-1)^{\lambda}}{\Gamma(1+\lambda)\,\Gamma(1-n-\lambda)\,(z-a)^{n+\lambda}(a-c)}\Big[1-\frac{1}{1-n-\lambda}\cdot\frac{z-a}{a-c}\\&\quad+\frac{1.2}{(1-n-\lambda)(2-n-\lambda)}\left(\frac{z-a}{a-c}\right)^{2}-\ldots+\frac{(-1)^{\lambda-1}.1.2..(\lambda-1)}{(1-n-\lambda)(2-n-\lambda)\ldots(-n-1)}\left(\frac{z-a}{a-c}\right)^{\lambda-1}\Big];\end{aligned}\right.$$

oder auch, wenn man will, die Differentialgleichung

$$113)\qquad \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+1}\,\frac{1}{(z-c)^{\lambda+1}}+\frac{n+\lambda+1}{z-c}\,\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\,\frac{1}{(z-c)^{\lambda+1}}=\frac{1}{\Gamma(-n)\,(z-a)^{n+1}(a-c)^{\lambda}\,(z-c)},$$

zu der das Integral gehört:

$$114)\qquad \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\,\frac{1}{(z-c)^{\lambda+1}}=\frac{1}{\Gamma(-n)\,(z-c)^{\lambda+n+1}(a-c)^{\lambda}}\cdot\left\{c'+\int\frac{(z-c)^{n+\lambda}\,dz}{(z-a)^{n+1}}\right\}.$$

Auf jeden Fall ist diese Derivation für alle z als entwickelt zu betrachten, und es lässt sich darüber aussagen, dass sie wieder drei Verzweigungspunkte besitzt: $z=c$, $z=a$ und $z=\infty$, sonst aber überall endlich und stetig ist. Der allgemeinste Werth dieser Derivation in Folge von h-maligen Umläufen von z um c lautet:

$$115)\qquad \left\{\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\,\frac{1}{(z-c)^{\lambda+1}}\right\}=\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\,\frac{1}{(z-c)^{\lambda+1}}+\frac{(-1)^{\lambda}.2ih\pi}{\Gamma(1+\lambda)\,\Gamma(-n-\lambda)\,(z-c)^{n+\lambda+1}}.$$

4.

Wir haben jetzt alle Mittel, die Derivation einer beliebigen rationalen gebrochenen Function zu untersuchen.

Liegt eine solche Function vor, so lässt sie sich bekanntlich zunächst im Allgemeinen in eine ganze und eine echt gebrochene Function zerlegen, und letztere ist ferner jederzeit in Partialbrüche mit constanten Zählern zerlegbar.

Es sei

$$f(z) = \frac{F(z)}{\varphi(z)} = [z^\nu] + \frac{\psi(z)}{\varphi(z)},$$

und $\varphi(z)$ von der Form

$$\varphi(z) = (z-c_0)^{\mu_0}(z-c_1)^{\mu_1}(z-c_2)^{\mu_2}\ldots(z-c_h)^{\mu_h}, \tag{116)}$$

wo $\mu_0\,\mu_1\ldots\mu_h$ beliebige ganze positive Zahlen bedeuten. Der Grad von $\varphi(z)$ ist dann kleiner als $\mu_0+\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_h$. Durch Partialbruchzerlegung von $\frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$ wird

$$\left.\begin{aligned} f(z) = [z^\nu] &+ \frac{\gamma_{0,0}}{(z-c_0)^{\mu_0}} + \frac{\gamma_{0,1}}{(z-c_0)^{\mu_0-1}} + \frac{\gamma_{0,2}}{(z-c_0)^{\mu_0-2}} + \ldots + \frac{\gamma_{0,\mu_0-2}}{(z-c_0)^2} + \frac{\gamma_{0,\mu_0-1}}{z-c_0} \\ &+ \frac{\gamma_{1,0}}{(z-c_1)^{\mu_1}} + \frac{\gamma_{1,1}}{(z-c_1)^{\mu_1-1}} + \frac{\gamma_{1,2}}{(z-c_1)^{\mu_1-2}} + \ldots + \frac{\gamma_{1,\mu_1-2}}{(z-c_1)^2} + \frac{\gamma_{1,\mu_1-1}}{z-c_1} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{\gamma_{h,0}}{(z-c_h)^{\mu_h}} + \frac{\gamma_{h,1}}{(z-c_h)^{\mu_h-1}} + \frac{\gamma_{h,2}}{(z-c_h)^{\mu_h-2}} + \ldots + \frac{\gamma_{h,\mu_h-2}}{(z-c_h)^2} + \frac{\gamma_{h,\mu_h-1}}{z-c_h} \end{aligned}\right\} \tag{117)}$$

oder in kürzerer Fassung

$$f(z) = [z^\nu] + \sum_{0}^{h}{}_h \sum_{0}^{\mu_h-1}{}_k \frac{\gamma_{h,k}}{(z-c_h)^{\mu_h-k}},$$

worin bekanntlich der Zähler ist:

$$\gamma_{h,k} = \frac{1}{\Gamma(k+1)}\cdot\left[D^k(t-c_h)^{\mu_h}\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\right]_{(t=c_h)}.$$

Zufolge der Darstellung 117) ist die Derivation einer beliebigen gebrochenen Function schon durch die vorhergehenden Untersuchungen erledigt, und es hat diese Derivation folgende Verzweigungspunkte: die Punkte $c_0, c_1, c_2, \ldots c_h$, den Punkt a und den unendlich fernen Punkt. Sonst ist diese Derivation überall endlich und stetig. Wie steht es nun mit der Vieldeutigkeit? Lässt man z einen der Punkte c, etwa den Punkt c_h, einmal im positiven Sinne umlaufen, so erhalten nach 115) die eindeutig genommenen Derivationen der Glieder der betreffenden Zeile in 117) der Reihe nach noch jedes ein additives Glied, so dass zur Derivation der ganzen Zeile folgender Ausdruck hinzutritt:

$$\begin{aligned} R_h = (-1)^{\mu_h-1}\cdot\frac{2i\pi}{\Gamma(\mu_h)}\cdot\frac{\gamma_{h,0}}{\Gamma(-n-\mu_h+1)}\,\frac{1}{(z-c_h)^{n+\mu_h}} &+ (-1)^{\mu_h-2}\cdot\frac{2i\pi}{\Gamma(\mu_h-1)}\cdot\frac{\gamma_{h,1}}{\Gamma(-n-\mu_h+2)}\cdot\frac{1}{(z-c_h)^{n+\mu_h-1}} \\ + (-1)^{\mu_h-3}\,\frac{2i\pi}{\Gamma(\mu_h-2)}\cdot\frac{\gamma_{h,2}}{\Gamma(-n-\mu_h+3)}\cdot\frac{1}{(z-c_h)^{n+\mu_h-2}} &+ \ldots + \frac{2i\pi}{\Gamma(1)\Gamma(-n)}\cdot\frac{\gamma_{h,\mu_h-1}}{(z-c_h)^{n+1}} \\ = 2i\pi\sum_{0}^{\mu_h-1}{}_k \frac{(-1)^{\mu_h-k-1}\gamma_{h,k}}{\Gamma(\mu_h-k)\Gamma(-n-\mu_h+k+1)}\cdot\frac{1}{(z-c_h)^{n+\mu_h-k}}. \end{aligned}$$

Um diese Summation ausführen zu können, berücksichtige man die Gleichungen

$$\frac{1}{\Gamma(\mu_h-k)} = \frac{(\mu_h-1)(\mu_h-2)\ldots(\mu_h-k)}{\Gamma(\mu_h)}$$

$$\frac{1}{\Gamma(-n-\mu_h+k+1)} = \frac{(-n-1)(-n-2)\ldots(-n-\mu_h+k+1)}{\Gamma(-n)}$$

$$\gamma_{h,k} = \frac{1}{k!}\left[D^k(t-c_h)^{\mu_h}\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\right]_{(t=c_h)};$$

dann geht der vorige Ausdruck über in

$$R_h = \frac{2i\pi}{\Gamma(\mu_h)\Gamma(-n)} \sum_0^{\mu_h-1} {}_k \binom{\mu_h-1}{k} \left[D^k (t-c_h)^{\mu_h} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} \right]_{(t=c_h)} \cdot \frac{(-1)^{\mu_h-k-1}(-n-1)(-n-2)\ldots(-n-\mu_h+k+1)}{(z-c_h)^{n+\mu_h-k}},$$

und weil

$$\frac{(-1)^{\mu_h-k-1}(-n-1)(-n-2)\ldots(-n-\mu_h+k+1)}{(z-c_h)^{n+\mu_h-k}} = \left[D^{\mu_h-1-k}(z-t)^{-n-1}\right]_{(t=c_h)},$$

so hat man weiter

$$R_h = \frac{2i\pi}{\Gamma(\mu_h)\Gamma(-n)} \cdot \sum_0^{\mu_h-1} {}_k \binom{\mu_h-1}{k} \left[D^k (t-c_h)^{\mu_h} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} \right] \cdot \left[D^{\mu_h-1-k} \frac{1}{(z-t)^{n+1}} \right];$$

wobei nach Ausführung der Differentiationen nach t für t der Werth $t = c_h$ zu setzen ist. Die Summation ist hier ausführbar und gibt schliesslich

118) $$R_h = \frac{2i\pi}{\Gamma(\mu_h)\Gamma(-n)} \left[D^{\mu_h-1} \frac{\psi(t)(t-c_h)^{\mu_h}}{\varphi(t)(z-t)^{n+1}} \right]_{(t=c_h)}.$$

Wird in gleicher Weise der Punkt c_h mehrmals, etwa λ_h-mal umlaufen, so tritt zur Derivation der betreffenden Zeile der Summand $\lambda_h R_h$ hinzu; man sieht leicht, dass nun allgemeinste Werth der Derivation, wenn z alle Punkte $c_0, c_1, c_2, \ldots c_h$ beziehungsweise $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_h$-mal umläuft, der folgende sein wird:

119) $$\left\{ \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \left([z^\nu] + \frac{\psi(z)}{\varphi(z)} \right) \right\} = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \left([z^\nu] + \frac{\psi(z)}{\varphi(z)} \right) + \lambda_0 R_0 + \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \ldots + \lambda_h R_h$$

wobei die λ beliebige ganze positive oder negative Zahlen sein können. Wir haben somit den Satz:

„Die Derivation einer rationalen gebrochenen Function ist unendlich vieldeutig; ihr allgemeinster Ausdruck besteht aus der eindeutigen Derivation, zu der gewisse Functionen R als Abzweigungen linear mit ganzen Zahlencoëfficienten hinzutreten. Die Anzahl dieser Abzweigungen R ist ebenso gross, als die Anzahl der von einander verschiedenen Wurzeln des Nenners $\varphi(z)$".

Hiebei wollen wir wieder davon absehen, dass nach Paragraph 4, Capitel I, sowohl die als eindeutig angenommene Derivation, als auch nach Gleichung 118) die einzelnen Abzweigungen R ebenso vieldeutig sind, wie die Potenz $\frac{1}{z^{n+1}}$.

5.

Wir wollen jetzt sehen, wie die in der vorigen Nummer gefundene Vieldeutigkeit der Derivation einer rationalen gebrochenen Function aus unseren ursprünglichen Definitionsgleichungen folgt. Es sei wieder:

$$f(z) = [z^\nu] + \frac{\psi(t)}{\varphi(z)};$$

dann ist nach 65)

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z) = \frac{1}{\Gamma(-n)} \cdot \int_a^z \frac{[t^\nu] + \frac{\psi(t)}{\varphi(t)}}{(z-t)^{n+1}} dt \qquad \text{real } n < 0,$$

wobei nach der ursprünglichen Auffassung der Integrationsweg az keinen der Punkte c_h umlaufen darf. Betrachtet man z aber als variabel, und lässt man demnach z etwa den Punkt c_h einmal im positiven Sinne umlaufen, so hat man jetzt einen Integrationsweg, der von a ausgeht, den Punkt c_h einmal im positiven Sinne umläuft und dann in z endigt. Dieser Integrationsweg lässt sich aber, wie man leicht sieht, auf den vorigen Integrationsweg az zurückführen, dem eine geschlossene Curve K_{c_h} vorangeht, welche den Punkt c_h einmal im positiven Sinne umläuft und z nicht umschliesst. Es tritt also dann zum obigen Ausdrucke noch hinzu

$$R_h = \frac{1}{\Gamma(-n)} \int_{K_{c_h}} \frac{[t'] + \frac{\psi(t)}{\varphi(t)}}{(z-t)^{n+1}} dt = \frac{1}{\Gamma(-n)} \cdot \int_{K_{c_h}} \frac{[t']dt}{(z-t)^{n+1}} + \frac{1}{\Gamma(-n)} \cdot \int_{K_{c_h}} \frac{\psi(t)\,dt}{\varphi(t)\,(z-t)^{n+1}}.$$

Da nun der Integrationsweg K_{c_h} eine geschlossene Curve ist und z ausserhalb derselben liegt, so verschwindet das erste Integral; man hat somit

$$R_h = \frac{1}{\Gamma(-n)} \int_{K_{c_h}} \frac{\psi(t)\,dt}{\varphi(t)(z-t)^{n+1}} = \frac{2i\pi}{\Gamma(\mu_h)\Gamma(-n)} \cdot \frac{\Gamma(\mu_h)}{2i\pi} \int_{K_{c_h}} \frac{\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}(t-c_h)^{\mu_h}(z-t)^{-n-1}}{(t-c_h)^{\mu_h}}\, dt.$$

In dieser letzten Darstellung ist die Function $\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}(t-c_h)^{\mu_h}(z-t)^{-n-1}$ auf und innerhalb der geschlossenen Curve K_{c_h} durchaus synectisch, und man erhält nach der bekannten Cauchy'schen Formel 4), da hier μ_h ganz und positiv ist,

$$R_h = \frac{2i\pi}{\Gamma(\mu_h)\Gamma(-n)} \left[D^{\mu_h - 1} \frac{\psi(t)(t-c_h)^{\mu_h}}{\varphi(t)(z-t)^{n+1}}\right]_{(t=c_h)},$$

was mit 118) übereinstimmt, hier jedoch zunächst nur für real $n < 0$ bewiesen ist. Man braucht aber nur nach z zu differenziren, um zu sehen, dass diese Darstellung von R_h für $n+1$ gilt, wenn sie für n gilt; sie gilt daher allgemein. Man kommt somit vollständig auf das unter 118) gefundene Resultat zurück, woran sich der Satz 119) knüpft.

Wir sehen also, dass sich die Vieldeutigkeit der Derivation auch aus den früher aufgestellten Definitionsgleichungen ergibt, sobald man sich z nicht mehr als festen Punkt, sondern unbeschränkt variabel denkt.

Wir werden diese Bemerkung dazu benützen, die Derivation einer algebraischen Function näher zu untersuchen.

6.

Es sei $f(z)$ eine s-werthige algebraische Function, deren Zweige die Werthe $f_1(z), f_2(z) \ldots f_p(z) \ldots f_q(z) \ldots f_r(z) \ldots f_s(z)$ haben; die Punkte $c_0, c_1, \ldots c_h$ seien die Unendlichkeitspunkte mit den ganzen positiven Exponenten $\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_h$ und die Punkte $e_0, e_1, \ldots e_k$ die Verzweigungspunkte, die auch zugleich Unendlichkeitspunkte (mit unganzen Exponenten) sein können. Die Verzweigungsschnitte ziehen wir von den Punkten $e_0, e_1, \ldots e_k$ sämmtlich nach dem Punkte a hin, und wenn die Variabele z einen solchen Verzweigungsschnitt überschreitet, so befindet sie sich jedesmal auf einem anderen Blatte, dem ein anderer Zweig der Function $f(z)$ zugehört.

Wenn wir von dem Zweige $f_p(z)$ ausgehen, also annehmen, z befinde sich ursprünglich auf dem p-ten Blatte, so ist

$$\overset{z}{\underset{a}{D^n}} f_p(z) = \frac{1}{\Gamma(-n)} \int_a^z \frac{f_p(t)\,dt}{(z-t)^{n+1}} \qquad \text{real } n < 0. \qquad 120)$$

Umläuft nun z den Punkt e_g einmal im positiven Sinne, so soll sich dann z auf dem q-ten Blatte befinden, also $f_p(z)$ in $f_q(z)$ übergehen. Man kann dann den Integrationsweg ersetzen durch eine von a aus um e_g gehende Schlinge K_{e_g}, die sich im p-ten Blatte befindet (und bei a nicht geschlossen ist), und einen darauffolgenden Zug az, der dem q-ten Blatte angehört, aber nirgends einen Ausnahmepunkt von $f(z)$ umläuft. Dann ist

$$\left\{\overset{z}{\underset{a}{D^n}} f_p(z)\right\} = \frac{1}{\Gamma(-n)} \int_{K_{e_g}} \frac{f_p(t)\,dt}{(z-t)^{n+1}} + \frac{1}{\Gamma(-n)} \int_a^z \frac{f_q(t)\,dt}{(z-t)^{n+1}}.$$

Umläuft in 120) z den Punkt e_g zweimal im positiven Sinne, so soll es sich dann im r-ten Blatte befinden und $f_r(z)$ der zugehörige Zweig der Function sein. Der Integrationsweg lässt sich dann ersetzen durch zwei Schlingen, die von a ausgehen und e_g je einmal im positiven Sinne umlaufen, wovon aber die erste Schlinge im p-ten Blatte, die zweite im q-ten Blatte ist, und eine darauffolgende Strecke az, die sich im r-ten Blatte befindet. Man hat dann

$$\left\{\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f_p(z)\right\} = \frac{1}{\Gamma(-n)}\int_{K_{e_g}} \frac{f_p(t)\,dt}{(z-t)^{n+1}} + \frac{1}{\Gamma(-n)}\int_{K_{e_g}} \frac{f_q(t)\,dt}{(z-t)^{n+1}} + \frac{1}{\Gamma(-n)}\int_a^z \frac{f_r(t)\,dt}{(z-t)^{n+1}}.$$

Umläuft jetzt z z. B. einen Unendlichkeitspunkt von ganzem positiven Exponenten, etwa den Punkt c_h, so bleibt es im r-ten Blatte, und zu den bisherigen Integrationen tritt noch eine um c_h gehende (geschlossene) Curve K_{c_h} hinzu, welche der Strecke az vorangeht; dann ist also

$$\left\{\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z)\right\} = \frac{1}{\Gamma(-n)}\int_{K_{e_g}} \frac{f_p(t)\,dt}{(z-t)^{n+1}} + \frac{1}{\Gamma(-n)}\int_{K_{e_g}} \frac{f_q(t)\,dt}{(z-t)^{n+1}} + \frac{1}{\Gamma(-n)}\int_{K_{c_h}} \frac{f_r(t)\,dt}{(z-t)^{n+1}} + \frac{1}{\Gamma(-n)}\int_a^z \frac{f_r(t)\,dt}{(z-t)^{n+1}}.$$

Man übersieht augenblicklich, wie sich die Sache allgemein gestalten wird, wenn z beliebig viele Verzweigungspunkte e und beliebig viele Unendlichkeitspunkte c in beliebiger Anordnung beliebig oft umläuft.

Sind λ_{hk} beliebige ganze positive oder negative Zahlen und setzt man zur Abkürzung

$$121)\left\{\begin{aligned} \lambda_{h,1}f_1(z)+\lambda_{h,1}f_2(z)+\ \ldots\ +\lambda_{h,s}f_s(z) &= \varphi_h(z)\\ \lambda_{k,1}f_1(z)+\lambda_{k,2}f_2(z)+\ \ldots\ +\lambda_{k,s}f_s(z) &= \varphi_k(z),\end{aligned}\right.$$

so hat man allgemein

$$\left\{\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f_p(z)\right\} = \frac{1}{\Gamma(-n)}\sum_0^h{}_h\int_{K_{c_h}} \frac{\varphi_h(t)\,dt}{(z-t)^{n+1}} + \frac{1}{\Gamma(-n)}\sum_0^k{}_k\int_{K_{e_k}} \frac{\varphi_k(t)\,dt}{(z-t)^{n+1}} + \frac{1}{\Gamma(-n)}\int_a^z \frac{f_{p^1}(t)\,dt}{(z-t)^{n+1}},$$

wobei angenommen ist, dass nach allen Umläufen z zuletzt auf dem p^1-ten Blatte ist. Setzt man noch

$$122)\qquad \frac{1}{\Gamma(-n)}\sum_0^h{}_h\int_{K_{c_h}} \frac{\varphi_h(t)\,dt}{(z-t)^{n+1}} = R;\ \frac{1}{\Gamma(-n)}\cdot\sum_0^k{}_k\int_{K_{e_k}} \frac{\varphi_k(t)\,dt}{(z-t)^{n+1}} = S$$

so kann man schreiben

$$123)\qquad \left\{\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f_p(z)\right\} = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z) + R + S$$

und man bemerkt leicht, dass dann diese Gleichung nicht nur für real $n < 0$, sondern auch für beliebige n gilt.

Die singulären Punkte c und e der algebraischen Function $f(z)$ sind hier stillschweigend alle im Endlichen liegend vorausgesetzt, so dass der Punkt $z = \infty$ für $f(z)$ ein gewöhnlicher Punkt ist. Eine Umkreisung des unendlich fernen Punktes geschieht bekanntlich auf die Weise, dass man die Variabele z auf der Peripherie eines hinreichend grossen Kreises, der alle singulären Punkte c und e einschliesst, einmal im entgegengesetzten Sinne herumführt. Macht nun in 120) z diese Bewegung, so bleibt es auf demselben Blatte, und die Wirkung ist dieselbe, als wenn es die einzelnen Punkte c und e jeden einmal im negativen Sinne umlaufen hätte, d. h. als wenn es die einzelnen Curven K_{c_h} und K_{e_k} jede, auf demselben Blatte, im negativen Sinne durchlaufen hätte. Dadurch erhält das Integral in 120) den Beitrag $R_\infty + S_\infty$, wo

$$R_\infty = -\frac{1}{\Gamma(-n)}\sum_0^h{}_h\int_{K_{c_h}} \frac{f_p(t)\,dt}{(z-t)^{n+1}};\quad S_\infty = -\frac{1}{\Gamma(-n)}\sum_0^k{}_k\int_{K_{e_k}} \frac{f_p(t)\,dt}{(z-t)^{n+1}}.$$

R_∞ und S_∞ sind also von derselben Art wie R und S in 123). $z = \infty$ ist also auch ein Verzweigungspunkt der Derivation und die Art der Verzweigung ist schon in 123) mit enthalten. Die Sache ändert sich nicht wesentlich, wenn $z = \infty$ ein Unendlichkeitspunkt oder Verzweigungspunkt der Function $f(z)$ ist; auch dann gilt die Gleichung 123) noch, wenn man bei der Bildung von R und S bloss die im Endlichen liegenden singulären Punkte berücksichtigt, weil eine Umkreisung von $z = \infty$ sich wieder zurückführen lässt auf Umläufe um die im Endlichen liegenden singulären Punkte. Nimmt man hiezu die Bemerkung, dass jeder gewöhnliche (und im Endlichen liegende) Punkt der Function $f(z)$ wieder ein gewöhnlicher Punkt der Derivation ist, so hat man folgenden Satz: „Die Derivation einer algebraischen Function ist unendlich vieldeutig, ihre Verzweigungspunkte sind die im Endlichen liegenden Pole und Verzweigungspunkte der algebraischen Function, ausserdem noch $z = a$ und $z = \infty$. Das Verhalten in der Umgebung von a ist nach Gleichung 37) zu beurtheilen."

Bezüglich des Ausdruckes R in 122) ist zu bemerken, dass sich derselbe im Allgemeinen durch eine Summe von Differenzialquotienten ausdrücken lässt, ähnlich wie bei einer rationalen Function R_h in 118). Was jedoch den Ausdruck S anbelangt, so lässt sich derselbe zwar nicht durch Differenzialquotienten ausdrücken, wohl aber gelingt es häufig, ihn auf eine Summe von Derivationen zurückzuführen, deren untere Grenze a und deren obere Grenzen die e_k sind. Dieser Fall tritt namentlich dann ein, wenn die algebraische Function eine solche ist, dass ihre logarithmische Ableitung rational ist, oder, was dasselbe ist, wenn die Quotienten der einzelnen Zweige $f_1(z)$, $f_2(z)$.. constant sind.

7.

Wir wollen jetzt kurz die Derivation solcher Functionen betrachten, deren logarithmische Ableitung rational und echt gebrochen ist und in keinem Punkte von höherer als der ersten Ordnung unendlich wird. Eine solche Function hat die wesentliche Eigenschaft, dass sie sich in der ganzen Zahlenebene durch ein endliches Product von der Form $f(z) = \prod_h (z-g_h)^{p_h}$ darstellen lässt, wo die Exponenten p_h beliebig complexe Constanten sind und die Punkte g_h natürlich sämmtlich im Endlichen liegen; sie ist im Allgemeinen unendlich vielwerthig, die Quotienten der einzelnen Zweige sind aber Constante. Wir schreiben unsere Function in der Form

$$f(z) = \frac{[z^\nu]}{(z-c_0)^{\mu_0}(z-c_1)^{\mu_1}\ldots(z-c_h)^{\mu_h}(z-e_0)^{m_0}(z-e_1)^{m_1}\ldots(z-e_k)^{m_k}},$$

wobei die μ ganze positive, die m dagegen beliebige complexe Zahlen sind. Dann sind die Punkte c die Unendlichkeitspunkte mit ganzen positiven Exponenten (Pole), und die e die Verzweigungspunkte. Auf diese Function sind genau die Betrachtungen des vorigen Paragraphen anwendbar und es gilt auch namentlich die Formel 123), nämlich

$$\left\{\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} f(z)\right\} = \overset{z}{\underset{a}{D}} f_{p'}(z) + R + S.$$

Behufs Bildung der Ausdrücke R und S bemerke man, dass hier einfach $\varphi_h(z) = A_h f(z)$ und $\varphi_k(z) = B_k f(z)$ ist, wo A_h und B_h gewisse Constanten sind, deren Werthe von der Art und Anzahl der Umläufe der Variabelen z um die Punkte c und e abhängen. Ferner sei $f_{p'}(z) = e^{2ip\pi} f(z)$, wo p ebenfalls von diesen Umläufen abhängt, dann hat man, diesen Bemerkungen zufolge:

$$R = \frac{1}{\Gamma(-n)} \sum_0^h A_h \int_{K_{c_h}} \frac{f(t)\,dt}{(z-t)^{n+1}} = \frac{2i\pi}{\Gamma(-n)} \sum_0^h \frac{A_h}{\Gamma(\mu_h)} \frac{\Gamma(\mu_h)}{2i\pi} \int_{K_{c_h}} \frac{f(t)(t-c_h)^{\mu_h}(z-t)^{-n-1}}{(t-c_h)^{\mu_h}}\,dt$$

$$= \frac{2i\pi}{\Gamma(-n)} \sum_0^h \frac{A_h}{\Gamma(\mu_h)} \cdot \left[D^{\mu_h-1} \frac{f(t)(t-c_h)^{\mu_h}}{(z-t)^{n+1}}\right]_{(t=c_h)},$$

wobei die Cauchy'sche Formel 4) angewendet wurde, und die Differentiation sich auf t bezieht, wofür nach Ausführung der Differentiation $t = e_k$ zu setzen ist. Ebenso hat man:

$$S = \frac{1}{\Gamma(-n)} \sum_0^k B_k \int_{K_{e_k}} \frac{f(t)\,dt}{(z-t)^{n+1}} = \frac{2i\pi}{\Gamma(-n)} \sum_0^k \frac{B_k}{\Gamma(m_k)} \cdot \frac{\Gamma(m_k)}{2i\pi} \int_{K_{e_k}} \frac{f(t)\,(t-e_k)^{m_k}(z-t)^{-n-1}}{(t-e_k)^{m_k}}$$

$$= \frac{2i\pi}{\Gamma(-n)} \sum_0^k \frac{B_k}{\Gamma(m_k)} \cdot \overset{t=e_k}{\underset{t=a}{D}}{}^{m_k-1} \frac{f(t)(t-e_k)^{m_k}}{(z-t)^{n+1}};$$

wobei die Definitionsgleichung 29) angewendet wurde. Die Derivationen beziehen sich auf t und sind zwischen den Grenzen a und e_k zu nehmen, während z bei diesen Derivationen als constant zu betrachten ist. Wir haben also

$$\left\{ \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z) \right\} = e^{-2i\nu\pi} \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z) + \frac{2i\pi}{\Gamma(-n)} \sum_0^h \frac{A_h}{\Gamma(\mu_h)} \cdot \left[D^{\mu_h-1} \frac{f(t)(t-c_h)^{\mu_h}}{(z-t)^{n+1}} \right]_{(t=c_h)}$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(-n)} \sum_0^k \frac{B_k}{\Gamma(m_k)} \overset{t=e_k}{\underset{t=a}{D}}{}^{m_k-1} \frac{f(t)(t-e_k)^{m_k}}{(z-t)^{n+1}}.$$

Weil die Differentialquotienten nur specielle Fälle der Derivationen sind, und man stets für ganze positive Indices setzen kann

$$[D^{\mu_h-1} F(t)]_{(t=c_h)} = \overset{t=c_h}{\underset{t=a}{D}}{}^{\mu_h-1} F(t),$$

so kann man die vorletzte Gleichung etwas compendiöser schreiben, wenn man wieder

$$f(z) = \frac{[z^\nu]}{\prod_r (z-g_r)^{p_r}}$$

setzt, es ist nämlich dann

124) $$\left\{ \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z) \right\} = e^{-i2\nu\pi} \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z) + \frac{2i\pi}{\Gamma(-n)} \sum_r \frac{C_r}{\Gamma(p_r)} \cdot \overset{t=g_r}{\underset{t=a}{D}}{}^{p_r-1} \frac{f(t)(t-g_r)^{p_r}}{(z-t)^{n+1}}.$$

Dadurch ist nun die Derivation einer solchen Function in Bezug auf ihre Vieldeutigkeit vollständig charakterisirt, und es wäre noch hinzuzufügen, dass ausser den Punkten g auch noch $z = \infty$ ein Verzweigungspunkt der Derivation ist, wie sich leicht durch ähnliche Überlegungen ergibt, wie im vorigen Paragraphen. Es haben nämlich auch hier Umkreisungen um $z = \infty$ dieselbe Wirkung wie gewisse gleichzeitige Umläufe um die einzelnen Punkte g. Das Verhalten im Punkte a ist hier wieder nach 37) zu beurtheilen. Wir haben also hier den Satz:

„Die Derivation einer Function der eben betrachteten Art hat ausser $z = a$ und $z = \infty$ noch eben so viele weitere Verzweigungspunkte als die Function Pole und Verzweigungspunkte besitzt; diejenigen Zweige, welche beim Umlaufen um die Pole der Function entstehen, sind durch gewisse Differentialquotienten, die Zweige aber, welche beim Umlaufen um die Verzweigungspunkte der Function entstehen, durch gewisse Derivationen ausdrückbar."

8.

Wenn eine Function $f(z)$ in der Umgebung des Ausnahmepunktes c die Darstellung gestattet

$$f(z) = \frac{1}{(z-c)^p} G_1(z-c),$$

unter $G_1(z-c)$ eine innerhalb eines gewissen um c geschlagenen Kreises convergente Potenzreihe von $z-c$ verstanden, so hat für denselben Bereich der ν-te Differentialquotient bekanntlich die Form

$$\overset{z}{D}{}^{\nu} f(z) = \frac{1}{(z-c)^{p+\nu}} \cdot G_2(z-c),$$

wo $G_2(z-c)$ innerhalb desselben Kreises convergirt wie $G_1(z-c)$. Zur Vervollständigung des Bisherigen müssen wir nun untersuchen, ob und in wiefern auch bei Derivationen ein analoger Satz gilt.

Wir betrachten zunächst die einfache Function $\frac{1}{(z-c)^p}$; dafür haben wir die Gleichung 114), welche, wie man sich leicht überzeugt, auch für beliebige λ gilt:

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \frac{1}{(z-c)^p} = \frac{1}{\Gamma(-n)(z-c)^{p+n}(a-c)^{p-1}} \cdot \left[c' + \int \frac{(z-c)^{p+n-1}}{(z-a)^{n+1}}\, dz\right],$$

und hier entwickeln wir das Integral nach steigenden Potenzen von $z-c$. Man erhält zunächst

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \frac{1}{(z-c)^p} = \frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(-n)(z-c)^{p+n}(a-c)^{p+n}} \left[c' + \frac{(z-c)^{n+p}}{n+p} + \binom{n+1}{1} \frac{(z-c)^{n+p+1}}{(n+p+1)(a-c)} \right.$$
$$\left. + \binom{n+2}{2} \frac{(z-c)^{n+p+2}}{(n+p+2)(a-c)^2} + \cdots\cdots \right],$$

worin noch c' zu bestimmen ist. Für $z=a$ und real $n<0$ kommt man auf die Reihe

$$\frac{1}{n+p} + \binom{n+1}{1} \frac{1}{n+p+1} + \binom{n+2}{1} \frac{1}{n+p+2} + \cdots\cdots = \frac{\Gamma(n+p)\Gamma(-n)}{\Gamma(p)};$$

somit ist, da die Derivation in diesem Falle verschwindet,

$$c' = -(a-c)^{n+p} \cdot \frac{\Gamma(n+p)\Gamma(-n)}{\Gamma(p)};$$

wir haben also, und zwar für alle n die Entwicklung

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \frac{1}{(z-c)^p} = (-1)^n \left[\frac{\Gamma(n+p)}{\Gamma(p)(z-c)^{p+n}} - \frac{1}{\Gamma(-n)} \cdot \frac{1}{(a-c)^{n+p}} \left\{ \frac{1}{n+p} + \binom{n+1}{1} \frac{(z-c)}{(n+p+1)(a-c)} \right.\right.$$
$$\left.\left. + \binom{n+2}{2} \frac{(z-c)^2}{(n+p+2)(a-c)^2} + \cdots \right\}\right],$$

welche unter der doppelten Voraussetzung gilt, dass mod $(z-c) <$ mod $(a-c)$ und $p+n$ keine ganze negative Zahl ist. Wir wollen sie kurz in der Form schreiben

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \frac{1}{(z-c)^p} = \frac{A}{(z-c)^{p+n}} + H(z-c), \tag{125}$$

wobei dann A eine gewisse Constante und $H(z-c)$ eine, innerhalb eines mit dem Radius mod $(a-c)$ um c beschriebenen Kreises convergente Potenzreihe vorstellt. Ist aber $p+n$ eine ganze negative Zahl, so kommt in der obigen Entwicklung ein Logarithmus vor; wir schreiben dann für diesen Fall:

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \frac{1}{(z-c)^p} = \frac{A\, l(z-c)}{(z-c)^{p+n}} + H(z-c);\ p+n \text{ ganz und negativ.} \tag{126}$$

Nun betrachten wir die allgemeinere Function

$$f(z) = \frac{1}{(z-c)^p} \cdot G(z-c), \tag{127}$$

worin $G(z-c)$ eine in der Umgebung von $z=c$ synectische Function bedeutet und beschreiben wir um c einen Kreis, der alle anderen Ausnahmepunkte von $f(z)$ ausschliesst, so ist dann $G(z-c)$ innerhalb dieses

Kreises nach ganzen positiven Potenzen von $z-c$ entwickelbar. Will man diese Functionen deriviren, so hat man zu unterscheiden, ob die untere Grenze a der Derivation innerhalb dieses Kreises liegt oder ausserhalb desselben.

Liegt z in unmittelbarer Nähe von c, und a innerhalb dieses Kreises, so darf man in der Gleichung

$$128)\qquad \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z) = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{(z-c)^p} . G(z-c)$$

auf die rechte Seite sofort die Formel 48) anwenden, wenn man darin $\varphi_1(z)$ und $\varphi_2(z)$ beziehungsweise durch $G(z-c)$ und $\frac{1}{(z-c)^p}$ ersetzt; man erhält dann

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z) = \binom{n}{0} G(z-c) \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{(z-c)^p} + \binom{n}{1} G'(z-c) \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-1} \frac{1}{(z-c)^p} + \binom{n}{2} G''(z-c) \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-2} \frac{1}{(z-c)^p} + \cdots,$$

und wenn man für die Derivationen rechter Hand die unter 125) und 126) gefundenen Ausdrücke einsetzt, so ergibt sich daraus ein Resultat von der Form

$$129)\qquad \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z) = \frac{G_1(z-c)}{(z-c)^{p+n}} + G_2(z-c),$$

oder

$$129a)\qquad \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z) = \frac{G_1(z-c)\, l(z-c)}{(z-c)^{p+n}} + G_2(z-c). \qquad p+n \text{ ganz und negativ.}$$

Hiebei sind $G_1(z-c)$ und $G_2(z-c)$ Potenzreihen von $z-c$, deren Convergenzbereich sich bis an den Punkt a ausdehnt.

Liegt dagegen in 128) die untere Grenze a ausserhalb des Convergenzbereiches von $G(z-c)$, so lässt sich diese Derivation nach 61) in zwei Theile zerlegen, deren eine Theil eine Derivation ist mit der unteren Grenze b, die man innerhalb dieses Convergenzbereiches annehmen kann; dafür gelten dann die Formeln 129) und $129)_a$ unmittelbar; der andere Theil ist aber ein bestimmtes Integral, das sich dann in der Umgebung von c nach ganzen positiven steigenden Potenzen von $z-c$ entwickeln lässt. Es bleibt also auch für diesen Fall das Resultat 129) und $129)_a$ formell bestehen, nur dehnt sich der Convergenzbereich von $G_1(z-c)$ und $G_2(z-c)$ nicht mehr bis a aus, sondern nur bis zu jenem Ausnahmepunkte von $f(z)$, welcher dem Punkte c am nächsten liegt.

Die Gleichungen 127), 129) und $129)_a$ enthalten folgenden Satz:

„Verhält sich eine Function $f(z)$ in der Nähe des Punktes c so wie $\frac{1}{(z-c)^p}$, so verhält sich deren Derivation in der Nähe dieses Punktes wie $\frac{1}{(z-c)^{p+n}}$ oder $\frac{l(z-c)}{(z-c)^{p+n}}$, jenachdem $p+n$ keine ganze negative Zahl ist, oder eine solche. p ist dabei vollständig willkürlich.“

Das ist die Verallgemeinerung des Eingangs erwähnten, die Differentialquotienten betreffenden Satzes.

9.

Wir wenden uns nun noch zur Betrachtung der Derivation ganzer transscendenter Functionen. Dieselben sind bekanntlich durch immer convergente Potenzreihen darstellbar und auf sie können somit die Formeln 49) und 53) ohne Weiteres angewandt werden. Man erhält dadurch die beiden Entwicklungen

$$130)\quad \left\{\begin{aligned} \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z) &= -\frac{1}{\Gamma(-n)} \cdot \frac{1}{(z-a)^n} \left[\frac{f(z)}{n} - \frac{f'(z)}{n-1}\frac{z-a}{1} + \frac{f''(z)}{n-2}\frac{(z-a)^2}{1.2} - \cdots\right] \\ \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z) &= -\frac{1}{\Gamma(-n)} \cdot \frac{1}{(z-a)^n} \cdot \left[\frac{f(a)}{n} + \frac{f'(a)}{n(1-n)}(z-a) + \frac{f''(a)}{n(1-n)(2-n)}(z-a)^2 + \cdots\right], \end{aligned}\right.$$

die für jedes z und a gelten, weil beide Reihen immer convergiren.

Man hat also unmittelbar den Satz:

„Die Derivation einer transscendenten ganzen Function ist demnach wieder eine transscendente ganze Function, dividirt durch $(z-a)^n$." [Vgl. den Satz in Paragraph 1. dieses Capitels].

Vergleicht man die in 130) rechter Hand vorkommenden Reihen, so hat man, indem man $a, z, -n$ beziehungsweise durch u, v, n ersetzt, bei Anwendung von Summenzeichen folgende interessante Gleichung

$$\sum_{0}^{\infty}{}_h \frac{f^{(h)}(v)}{n+h} \cdot \frac{(u-v)^h}{1.2\ldots h} = \sum_{0}^{\infty}{}_h \frac{f^{(h)}(u)(v-u)^h}{n(n+1)\ldots(n+h)}, \tag{131}$$

welche (f als transscendente ganze Function vorausgesetzt) für alle u, v und n besteht, ausgenommen, dass n eine ganze negative Zahl ist, wo beide Seiten unendlich werden. [Ist jedoch f keine ganze transscendente, sondern eine beliebige Function, so kann diese Gleichung 131) natürlich nur mehr für solche Werthe von u und v bestehen, dass beide Reihen gleichzeitig convergiren. Die Grösse n bleibt aber immer noch willkürlich.]

10.

Alle bisher betrachteten Functionen haben zu dem Ergebnisse geführt, dass die Derivation solcher Functionen ausser $z = a$ und $z = \infty$ noch ebenso viele weitere Unstetigkeitspunkte besitzt, als die gegebene Function derer im Endlichen hat, und dass der allgemeinste Werth der Derivation sich aus der eindeutig genommenen Derivation (die für $z = a$ und real $n < 0$ verschwindet) und gewissen zugehörigen Zweigen linear mit constanten Coefficienten zusammensetzt.

Dieser Satz gilt nun allgemein für solche Functionen, die im Endlichen, nach der Bezeichnung des Paragraphen 4, Capitel I blos Unstetigkeiten erster Art besitzen, d. h. solche Unstetigkeitspunkte c, für welche sich eine Zahl p von der Beschaffenheit fixiren lässt, dass für alle Annäherungsrichtungen

$$\operatorname{Lim}\left[(t-c)^{p+\delta} f(t)\right]_{(t=c)} = 0; \operatorname{Lim}\left[(t-c)^{p-\delta} f(t)\right]_{(t=c)} = \infty,$$

unter δ eine beliebig kleine positive Grösse verstanden.

Denn man sieht leicht ein, dass in der Gleichung

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} f(z) = \frac{1}{\Gamma(-n)} \int_{a}^{z} \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}}$$

zu Unstetigkeitspunkten der Derivation ausser $z = a$ und $z = \infty$ eben nur die Unstetigkeitspunkte der Function $f(t)$ Anlass geben, und dass der allgemeinste Werth der Derivation gefunden wird, wenn man rechter Hand den Integrationsweg als eine beliebige Curve voraussetzt. Diese beliebige Curve lässt sich dann ersetzen durch die Strecke az, welche keine Unstetigkeitspunkte von $f(t)$ durch- oder umläuft, der aber gewisse, in a beginnende und solche Unstetigkeitspunkte umlaufende Schlingen vorangehen. Diese Schlingen schliessen den Punkt z allemal aus, daher besteht der allgemeinste Werth der Derivation solcher Functionen aus der eindeutig genommenen Derivation und einer Summe von Curvenintegralen, die in Bezug auf z (bis auf die Irrationalität $e^{-2in\pi}$) durchaus eindeutig sind.

Bei solchen Functionen können dann auch in a nur Unstetigkeiten erster Art auftreten und die Unstetigkeit der Derivation in a ist dann ein für allemal durch die Gleichung 37) characterisirt. Indem wir nun die Derivation solcher Functionen, die Unstetigkeitspunkte zweiter Art aufweisen, hier nicht mehr betrachten, gehen wir gleich zu Beispielen für das Bisherige über, wobei sich auch von selbst Anwendungen auf lineare Differentialgleichungen darbieten werden.

V.

Beispiele. Anwendung auf lineare Differentialgleichungen.

1.

Die rationale Function

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{i}{2}\cdot\frac{1}{z+i} - \frac{i}{2}\cdot\frac{1}{z-i}$$

hat die beiden Pole $z = -i$ und $z = +i$; man hat demnach für dieselbe nach Formel 119)

$$\left\{ \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{1+z^e} \right\} = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{1+z^2} + \lambda_0 R_0 + \lambda_1 R_1;$$

wobei die λ gewisse Zahlen sind, während man für die R nach 118) findet:

$$R_0 = \frac{2i\pi}{\Gamma(-n)}\cdot\left[\frac{t+i}{(1+t^2)(z-t)^{n+1}}\right]_{(t=-i)} = -\frac{\pi}{\Gamma(-n)(z+i)^{n+1}}$$

$$R_1 = \frac{2i\pi}{\Gamma(-n)}\left[\frac{t-i}{(1+t^2)(z-t)^{n+1}}\right]_{(t=i)} = \frac{\pi}{\Gamma(-n)(z-i)^{n+1}}.$$

Sonach ist jetzt

132) $$\left\{ \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{1+z^2} \right\} = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{1+z^2} + \frac{\lambda_0 \pi}{\Gamma(-n)(z+i)^{n+1}} + \frac{\lambda_1 \pi}{\Gamma(-n)(z-i)^{n+1}}.$$

Für $n = -1$ gibt diese Gleichung das bekannte Resultat von der unendlichen Vieldeutigkeit der Function arc tang z.

Die rechter Hand stehende Derivation

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{1+z^2} = \frac{i}{2} \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{z+i} - \frac{i}{2} \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{z-i},$$

welche eindeutig zu nehmen ist, erlaubt mittelst Formel 110) die Darstellung

133) $$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{1+z^2} = \frac{i}{2\Gamma(-n)(z+i)^{n+1}}\left[c_1 + \int \frac{(z+i)^n}{(z-a)^{n+1}}\,dz\right] - \frac{i}{2(\Gamma-n)\,(z-i)^{n+1}}\left[c_2 + \int \frac{(z-i)^n}{(z-a)^{n+1}}\,dz\right],$$

die für alle n giltig ist. Wollte man diese Derivation in (stets convergente) Reihen entwickelt haben, so könnte man die Gleichungen 95), 96), 100), 102), 103) und 104) sofort dazu benützen, wenn man darin z und a beziehungsweise durch $z \pm i$ und $a \pm i$ ersetzte. Wir wollen es unterlassen, solche Reihen explicite herzuschreiben, dagegen wollen wir für diese Derivation eine lineare Differentialgleichung mit ganzen rationalen Coefficienten zu gewinnen suchen. Haben wir eine solche Differentialgleichung von möglichst niedriger Ordnung gefunden, der

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{1+z^2}$$

als Function von z betrachtet, genügt, so muss derselben auch, wegen der Eindeutigkeit ihrer Coefficienten, der allgemeine, dreigliedrige Ausdruck 132)

$$\left\{ \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{1+z^2} \right\}$$

genügen, und zwar vorerst nur für gewisse λ, dann auch überhaupt für beliebige λ. Wir schliessen daraus, dass eine solche Differentialgleichung, weil ihre Lösung zwei Constante hat, nothwendig von der zweiten Ordnung ist; weiter kann man noch sagen, dass sie nicht homogen sein wird; den homogenen Theil dieser Differentialgleichung, gleich Null gesetzt, werden aber die mit λ_0 und λ_1 multiplicirten Ausdrücke einzeln befriedigen.

Die verlangte Differentialgleichung wirklich zu bilden hat nun nicht die mindeste Schwierigkeit, wir kennen ja schon ihre Lösung 132), statt der man auch 133) nehmen kann, wenn man unter c_1 und c_2 jetzt beliebige Constante versteht.

Setzt man in 133) zur Abkürzung

$$c_1+\int \frac{(z+i)^n}{(z-a)^{n+1}}\,dz = J_1; \qquad c_2+\int \frac{(z-i)^n}{(z-a)^{n+1}}\,dz = J_2,$$

so lautet diese Gleichung

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\,\frac{1}{1+z^2} = \frac{i}{2}\,\frac{J_1}{\Gamma(-n)(z+i)^{n+1}} - \frac{i}{2}\,\frac{J_2}{\Gamma(-n)(z-i)^{n+1}},$$

und durch zweimalige Differentiation erhält man daraus

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+1}\,\frac{1}{1+z^2} = \frac{i}{2}\,\frac{J_1}{\Gamma(-n-1)(z+i)^{n+2}} - \frac{i}{2}\,\frac{J_2}{\Gamma(-n-1)(z+i)^{n+2}} + \frac{1}{\Gamma(-n)(1+z^2)(z-a)^{n+1}}$$

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+2}\,\frac{1}{1+z^2} = \frac{i}{2}\,\frac{J_1}{\Gamma(-n-2)(z+i)^{n+3}} - \frac{i}{2}\,\frac{J_2}{\Gamma(-n-2)(z-i)^{n+3}} - \frac{(3n+5)z^2-a(n+2)z+n+1}{\Gamma(-n)(1+z^2)^2(z-a)^{n+2}}.$$

Eliminirt man aus diesen drei Gleichungen die beiden Integrale J_1 und J_2, so erhält man nach einiger Reduction:

$$(1+z^2)\,\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+2}\,\frac{1}{1+z^2} + 2(n+2)z\,\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+1}\,\frac{1}{1+z^2} + (n+1)(n+2)\,\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\,\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{\Gamma(-n-1)(z-a)^{n+2}} \qquad 134)$$

als verlangte Differentialgleichung. Wir wollen dieselbe auch noch auf einem anderen sehr einfachen Wege herleiten, der die Kenntniss der explicite hingeschriebenen Lösung 133) nicht voraussetzt.

Setzt man nämlich zur Abkürzung

$$\frac{1}{1+z^2} = \omega,$$

so hat man daraus

$$(1+z^2).\omega = 1.$$

Derivirt man nun diese Gleichung nach der Formel 48) zum Index $n+2$, indem man in letzterer $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ und n beziehungsweise durch $1+z^2$, ω, $n+2$ ersetzt, so erhält man unmittelbar

$$(1+z^2)\,\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+2}\,\omega + 2(n+2).z.\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+1}\,\omega + (n+1)(n+2)\,\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\,\omega = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+2}(1);$$

wird hierin linker Hand für ω der Werth $\frac{1}{1+z^2}$ gesetzt und rechter Hand die Constante 1 nach 39) derivirt, so wird diese Gleichung mit 134) identisch. Setzt man in 134)

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\,\frac{1}{1+z^2} = \varphi,$$

so hat man

$$(1+z^2)\frac{d^2\varphi}{dz^2} + 2(n+2)z\frac{d\varphi}{dz} + (n+1)(n+2)\varphi = \frac{1}{\Gamma(-n-1)(z-a)^{n+2}}, \qquad 135)$$

zu welcher Differentialgleichung nach dem Vorhergehenden die Lösung

$$\varphi = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\,\frac{1}{1+z^2} + \frac{c_1}{(z+i)^{n+1}} + \frac{c_2}{(z-i)^{n+1}} \qquad 136)$$

gehört. Zur homogenen Differentialgleichung

137) $$(1+z^2)\frac{d^2\psi}{dz^2}+2(n+2)z\frac{d\psi}{dz}+(n+1)(n+2)\psi=0$$

gehört demnach die Lösung

138) $$\psi=\frac{c_1}{(z+i)^{n+1}}+\frac{c_2}{(z-i)^{n+1}},\qquad n \gtrless -1$$

wo nur der Fall $n=-1$ ausgeschlossen ist. In diesem Falle wird aber 135) selbst homogen, daher ist nach 136) hiefür

138 *a*) $$\psi=c_1 \text{ arc tang } z+c_2 \qquad n=-1.$$

Ferner lässt sich aus 135) eine homogene Differentialgleichung dritter Ordnung bilden, und deren Lösung vollständig angeben. Differenzirt man nämlich 135) einmal nach z und eliminirt man hierauf die rechte Seite, so hat man, χ für φ schreibend,

139) $$\left\{\begin{aligned}&(1+z^2)(z-a)\frac{d^3\chi}{dz^3}+[(3n+8)z^2-2a(n+3)z+n+2]\frac{d^2\chi}{dz^2}+(n+2)\,(3n+7)z-(n+3)a]\frac{d\chi}{dz}\\&\qquad+(n+1)(n+2)^2\chi=0.\end{aligned}\right.$$

Hievon lautet die Lösung

140) $$\chi=c_1\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n\frac{1}{1+z^2}+\frac{c_2}{(z+i)^{n+1}}+\frac{c_3}{(z-i)^{n+1}},$$

ausgenommen die Fälle $n=-1,\,0,\,+1,\,2,\,3\ldots$, wo sich diese drei Particularlösungen auf blos zwei reduciren.

Wir wollen nun auch diese drei Ausnahmsfälle erledigen.

Im Falle $n=-1$ reduciren sich von den drei Particularlösungen, die wir folgeweise mit χ_1, χ_2 und χ_3 bezeichnen wollen, χ_2 und χ_3 auf Constanten. Wir setzen demnach $n=-1-\delta$, also

$$\chi_2=(z+i)^\delta;\qquad \chi_3=(z-i)^\delta.$$

Dann ist

$$\text{Lim}\left[\frac{i}{2}\frac{\chi_2-\chi_3}{\delta}\right]_{(\delta=0)}=\text{arc tang } z$$

eine neue Particularlösung, die wir statt χ_2 nehmen können. Jetzt können wir die drei Particularlösungen schreiben:

$$\chi_1=\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{-1-\delta}\frac{1}{1+z^2};\qquad \chi_2=\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{-1}\frac{1}{1+z^2};\qquad \chi_3=1.$$

Drückt man diese Derivationen durch das bestimmte Integral 65) aus, nämlich

$$\chi_1=\frac{1}{\Gamma(1+\delta)}\int_a^z\frac{dt}{(1+t^2)(z-t)^{-\delta}};\qquad \chi_2=\frac{1}{\Gamma(1)}\int_a^z\frac{dt}{1+t^2};$$

und bildet man

$$\frac{\chi_1-\dfrac{\chi_2}{\Gamma(1+\delta)}}{\delta}=\frac{1}{\Gamma(1+\delta)}\int_a^z\frac{dt}{1+t^2}\left[\frac{(z-t)^\delta-1}{\delta}\right],$$

so erhält man durch Grenzübergang für $\delta=0$ die neue Particularlösung

$$\int_a^z\frac{l(z-t)\,dt}{1+t^2},$$

die wir statt χ_1 nehmen. Wir haben somit die Lösung

$$\chi = c_1 \int_a^z \frac{l(z-t)\,dt}{1+t^2} + c_2 \operatorname{arc\,tang} z + c_3 \qquad n = -1. \tag{140a}$$

Etwas einfacher gestaltet sich die Sache für $n = 0, 1, 2, \ldots$; in diesen Fällen wird in 140) χ_1 linear abhängig von χ_2 und χ_3. Bezeichnet ν eine ganze positive Zahl oder auch Null, so setzen wir $n = \nu - \delta$ und

$$\chi_1 = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{\nu-\delta} \frac{1}{1+z^2}; \; \chi' = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{\nu} \frac{1}{1+z^2}; \; \chi_2 = \frac{1}{(z+i)^{\nu+1}}; \; \chi_3 = \frac{1}{(z-i)^{\nu+1}}.$$

Drückt man diese Derivationen durch das Curvenintegral 29) aus, so hat man:

$$\chi_1 = \frac{\Gamma(\nu-\delta+1)}{2i\pi} \int_{K_z} \frac{(t-z)^{\delta}\,dt}{(1+t^2)(t-z)^{\nu+1}}; \; \chi' = \frac{\Gamma(\nu+1)}{2i\pi} \int_{K_z} \frac{dt}{(1+t^2)(t-z)^{\nu+1}},$$

worin, wie gewöhnlich, der Integrationsweg K_z von a ausgehend um z eine Schlinge bildet, die die Punkte $\pm i$ ausschliesst. Bildet man nun

$$\frac{\chi_1 - \frac{\Gamma(\nu-\delta+1)}{\Gamma(\nu+1)} \chi'}{\delta} = \frac{\Gamma(\nu-\delta+1)}{2i\pi} \int_{K_z} \frac{dt}{(1+t^2)(t-z)^{\nu+1}} \left[\frac{(t-z)^{\delta}-1}{\delta} \right],$$

so erhält man daraus durch Grenzübergang für unendlich abnehmende δ die neue Particularlösung

$$\frac{\Gamma(\nu+1)}{2i\pi} \int_{K_z} \frac{l(t-z)\,dt}{(1+t^2)(t-z)^{\nu+1}},$$

die man statt χ_1 nehmen kann; es lautet dann die vollständige Lösung von 139):

$$\chi = c_1 \int_{K_z} \frac{l(t-z)\,dt}{(1+t^2)(t-z)^{\nu+1}} + \frac{c_2}{(z+i)^{\nu+1}} + \frac{c_3}{(z-i)^{\nu+1}} \qquad n = \nu. \tag{140b}$$

Somit erscheint die Differentialgleichung 139) unter allen Umständen gelöst.

Genau dieselben Betrachtungen, die wir in diesem Paragraphe auf die Function $\frac{1}{1+z^2}$ anwendeten, lassen sich auch auf die Function $\frac{1}{(z-b)(z-c)}$ anwenden, wodurch man auch etwas allgemeinere Resultate erhält.

2.

Die zweiwerthige algebraische Function

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}},$$

deren Verzweigungspunkte $z = \pm 1$ sind, liefert bei einer einmaligen Umkreisung um den Punkt $+1$ im positiven Sinne (vergl. Paragraph 6 des vorigen Kapitels)

$$\left\{ \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \right\} = - \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{1}{\Gamma(-n)} \int_{K_{+1}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\,(z-t)^{n+1}},$$

und bei nochmaliger Umkreisung im selben Sinne

$$\left\{ \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \right\} = + \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{1}{\Gamma(-n)} \int_{K_{+1}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\,(z-t)^{n+1}} - \frac{1}{\Gamma(-n)} \int_{K_{+1}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\,(z-t)^{n+1}}$$

$$= \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Zwei Umläufe nach einander um den Punkt $+1$ geben demnach dasselbe, wie kein Umlauf; und allgemeiner, eine ungerade Anzahl von Umläufen um den Punkt $+1$ im selben Sinne hat die Wirkung eines einzigen Umlaufes, eine gerade Anzahl von solchen Umläufen hat dagegen gar keine Wirkung. Dasselbe gilt auch bezüglich des Punktes -1. Soll daher von Umläufen um diese Punkte überhaupt die Rede sein, so muss deren Anzahl um jeden dieser Punkte eine ungerade sein, die wir $=1$ annehmen können. Der allgemeinste Weg, den die Variabele z beschreiben kann, besteht demnach aus aufeinanderfolgenden einmaligen Umläufen abwechselnd um die Punkte $+1$ und -1. Hiebei sind aber zwei Fälle zu unterscheiden: Hört man mit Umkreisungen um den Punkt -1 auf, so ist $f(z) = +\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ geworden und jeder Punkt ist gleich oft umlaufen worden. Daher ist

$$\left\{\overset{z}{\underset{a}{D^n}} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\right\} = \overset{z}{\underset{a}{D^n}} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{\lambda}{\Gamma(-n)} \int_{K_{+1}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\,(z-t)^{n+1}} - \frac{\lambda}{\Gamma(-n)} \int_{K_{-1}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\,(z-t)^{n+1}},$$

wo λ eine beliebige ganze Zahl ist. Hört man dagegen mit Umkreisungen um den Punkt $+1$ auf, so ist

$$\left\{\overset{z}{\underset{a}{D^n}} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\right\} = -\overset{z}{\underset{a}{D^n}} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{\lambda+1}{\Gamma(-n)} \int_{K_{+1}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\,(z-t)^{n+1}} - \frac{\lambda}{\Gamma(-n)} \int_{K_{-1}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\,(z-t)^{n+1}}.$$

Zu untersuchen wäre noch, wie sich die Sache gestaltet, wenn man umgekehrt verfährt, d. h. zuerst den Punkt -1, dann den Punkt $+1$ u. s. f. umläuft; thut man dies aber, so kommt man wieder auf diese beiden Formeln zurück, nur steht dann $-\lambda$ statt λ.

Die beiden rechter Hand vorkommenden Curvenintegrale, die wir vorübergehend mit J_{+1} und J_{-1} bezeichnen wollen, sind Derivationen nach t zwischen den Grenzen a und ± 1. Nämlich

$$J_{+1} = \frac{1}{\Gamma(-n)} \int_{K_{+1}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\,(z-t)^{n+1}} = \frac{2i\pi}{\Gamma(-n)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2i\pi} \int_{K_{+1}} \frac{1}{i\sqrt{t+1}\,(z-t)^{n+1}} \cdot \frac{dt}{(t-1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{2\pi}{\Gamma(-n)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \overset{t=1}{\underset{t=a}{D^{-\frac{1}{2}}}} \frac{1}{\sqrt{t+1}\,(z-t)^{n+1}},$$

und analog ist

$$J_{-1} = \frac{1}{\Gamma(-n)} \cdot \int_{K_{-1}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\,(z-t)^{n+1}} = \frac{2\pi}{\Gamma(-n)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \overset{t=-1}{\underset{t=a}{D^{-\frac{1}{2}}}} \frac{1}{\sqrt{t-1}\,(z-1)^{n+1}}.$$

Drückt man dieselben nach 65) durch das bestimmte Integral aus, so ist weiter

$$J_{+1} = \frac{2}{\Gamma(-n)} \cdot \int_a^{+1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\,(z-t)^{n+1}}; \quad J_{-1} = \frac{2}{\Gamma(-n)} \cdot \int_a^{-1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\,(z-t)^{n+1}}.$$

Daher ist

$$\lambda J_{+1} - \lambda J_{-1} = \frac{2\lambda}{\Gamma(-n)} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\,(z-t)^{n+1}}.$$

Führt man das in die obigen Gleichungen ein, so resultirt

$$141)\quad \begin{cases} \left\{\overset{z}{\underset{a}{D^n}} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\right\} = \overset{z}{\underset{a}{D^n}} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{2\lambda}{\Gamma(-n)} \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\,(z-t)^{n+1}} \\ \left\{\overset{z}{\underset{a}{D^n}} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\right\} = -\overset{z}{\underset{a}{D^n}} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{2}{\Gamma(-n)} \int_a^{+1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\,(z-t)^{n+1}} + \frac{2\lambda}{\Gamma(-n)} \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\,(z-t)^{n+1}}, \end{cases}$$

wobei die Integrationen nach t nunmehr eindeutig zu nehmen sind. Für $n=-1$ hat man wieder ein bekanntes Resultat.

Um eine lineare Differentialgleichung für diese Derivation herzuleiten, werden wir uns einer Methode bedienen, die auch im Folgenden fast ausschliesslich zur Geltung kommen wird. Handelt es sich nämlich allgemein darum, eine lineare Differentialgleichung mit ganzen rationalen Coëfficienten für $\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z)$ aufzustellen, so bilde man vorerst eine lineare homogene Differentialgleichung mit ganzem rationalen Coëfficienten, welcher $f(z)$ genügt, und derivire dann diese Differentialgleichung, wobei die Formeln 48), 62) und 64) zur Anwendung zu kommen haben, dann hat man unmittelbar die verlangte Differentialgleichung für $\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n f(z)$.

Im vorliegenden Falle hat man also zuerst die Differentialgleichung für

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

zu bilden, dieselbe lautet

$$(1-z^2)\frac{d\omega}{dz}-z\omega=0$$

oder

$$(1-z^2)\omega'-z\omega=0.$$

Derivirt man nun diese Differentialgleichung, so hat man unter Benützung von 48)

$$(1-z^2)\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n\omega'-2nz\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-1}\omega'-n(n-1)\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-2}\omega'$$
$$-z\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n\omega-n\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-1}\omega=0,$$

wobei a und n beliebig sind. Weiter ist nach 62):

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n\omega'=\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+1}\omega-\frac{1}{\Gamma(-n)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-a^2}(z-a)^{n+1}}$$
$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-1}\omega'=\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n\omega-\frac{1}{\Gamma(1-n)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-a^2}(z-a)^n}$$
$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-2}\omega'=D^{n-1}\omega-\frac{1}{\Gamma(2-n)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-a^2}(z-a)^{n-1}},$$

und durch Einführung dieser Werthe geht die derivirte Differentialgleichung über in

$$(1-z^2)\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+1}\omega-(2n+1)z\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n\omega-n^2\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-1}\omega=\frac{1}{\Gamma(-n)}\cdot\frac{\sqrt{1-a^2}}{(z-a)^{n+1}}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-1}\omega=\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}=\varphi,$$

so lautet also die Differentialgleichung

$$(1-z^2)\frac{d^2\varphi}{dz^2}-(2n+1)z\frac{d\varphi}{dz}-n^2\varphi=\frac{1}{\Gamma(-n)}\cdot\frac{\sqrt{1-a^2}}{(z-a)^{n+1}}, \qquad 142)$$

zu welcher, vermöge der Herleitung,

$$\varphi=\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

ein Integral ist. Daher ist auch

$$\varphi = \left\{ \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \right\}$$

ein Integral derselben, was nach 141) nur möglich ist, wenn der Ausdruck

$$\psi_0 = \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}(z-t)^n}$$

der homogenen Differentialgleichung

143) $$(1-z^2)\frac{d^2\psi}{dz^2} - (2n+1)z\frac{d\psi}{dz} - n^2\psi = 0$$

genügt. Setzt man in 142) $a = \pm 1$, so erhält man dieselbe homogene Differentialgleichung 143), von dieser sind somit auch

$$\psi_1 = \overset{z}{\underset{1}{D}}{}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}; \qquad \psi_2 = \overset{z}{\underset{-1}{D}}{}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

Particularlösungen. Diese drei Particularlösungen ψ_0, ψ_1 und ψ_2 sind, wie es auch sein muss, nach 61) von einander linear abhängig, wir können somit als vollständige Lösung von 143) die folgende nehmen:

144) $$\psi = c_1 \overset{z}{\underset{1}{D}}{}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} + c_2 \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}(z-t)^n},$$

dann lautet aber die vollständige Lösung von 142):

145) $$\varphi = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} + c_1 \overset{z}{\underset{1}{D}}{}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} + c_2 \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}(z-t)^n}.$$

Aus 142) lässt sich ferner ebenfalls durch nochmalige Differentiation eine homogene Differentialgleichung dritter Ordnung bilden und vollständig lösen, nämlich, wenn man χ statt φ schreibt:

146) $$\left\{ \begin{aligned} &(1-z^2)(z-a)\frac{d^3\chi}{dz^3} - [(3n+4)z^2 - (2n+3)az - n - 1]\frac{d^2\chi}{dz^2} - (n+1)[(3n+2)z - (n+1)a]\frac{d\chi}{dz} \\ &\qquad - n^2(n+1)\chi = 0. \end{aligned} \right.$$

Die Lösung hievon lautet

147) $$\chi = c_1 \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} + c_2 \overset{z}{\underset{1}{D}}{}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} + c_3 \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}(z-t)^n}.$$

ausgenommen die Fälle $a = \pm 1$ oder $n = 1, 2, 3 \ldots$, wo sich die drei Particularlösungen auf blos zwei reduciren.

Im Falle $a = +1$ nehmen wir vorerst

$$\chi_1 = \overset{z}{\underset{1-\delta}{D}}{}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}; \quad \chi_2 = \overset{z}{\underset{1}{D}}{}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}; \quad \chi_3 = \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}(z-t)^n},$$

dann ist nach 61)

$$\chi_1 = \overset{z}{\underset{1}{D}}{}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{1}{\Gamma(1-n)} \int_{1-\delta}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}(z-t)^n} = \chi_2 + \frac{1}{\Gamma(1-n)} \int_{1-\delta}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}(z-t)^n}.$$

Bildet man nun

$$\operatorname{Lim}\left[\frac{\chi_1-\chi_2}{\sqrt{\delta}}\right]_{(\delta=0)}=\frac{1}{\Gamma(1-n)\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{(z-1)^n},$$

so hat man offenbar eine neue Particularlösung, die wir statt χ_1 nehmen; sie lautet, abgesehen von constanten Factoren:

$$\chi_1=\frac{1}{(1-z)^n}.$$

Somit hat man in diesem Falle statt 147):

$$\chi=\frac{c_1}{(1-z)^n}+c_2\overset{z}{\underset{1}{D}}{}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}+c_3\int_{-1}^{+1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\,(z-t)^n}\qquad a=+1. \qquad 147a)$$

Ist in 146) $a=-1$, so nehme man

$$\chi_1=\overset{z}{\underset{-1-\delta}{D}}{}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1-z^2}};\qquad \chi_2=\overset{z}{\underset{-1}{D}}{}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}};\qquad \chi_3=\int_{-1}^{+1}\frac{dt}{\sqrt{1-z^2}(z-t)^n};$$

man findet dann nach derselben Methode aus

$$\operatorname{Lim}\left[\frac{\chi_1-\chi_2}{\sqrt{\delta}}\right]_{(\delta=0)}$$

die Particularlösung

$$\chi_1=\frac{1}{(1+z)^n},$$

so dass jetzt ist:

$$\chi=\frac{c_1}{(1+z)^n}+c_2\overset{z}{\underset{1}{D}}{}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}+c_3\int_{1}^{+1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\,(z-t)^n}\qquad a=-1. \qquad 147b)$$

Ist endlich in 146) n eine ganze positive Zahl $=\nu$, so setze man

$$\chi_1=\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{\nu-\delta-1}\frac{1}{\sqrt{1-z^2}};\qquad \chi_2=\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{\nu-1}\frac{1}{\sqrt{1-z^2}};\qquad \chi_3=\int_{-1}^{+1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\,(z-t)^\nu}$$

und drücke die Derivationen durch das Curvenintegral 29) aus:

$$\chi_1=\frac{\Gamma(\nu-\delta)}{2i\pi}\int_{K_z}\frac{(t-z)^\delta\,dt}{\sqrt{1-t^2}(t-z)^\nu};\qquad \chi_2=\frac{\Gamma(\nu)}{2i\pi}\int_{K_z}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}(t-z)^\nu}.$$

Bildet man dann den Ausdruck

$$\frac{\chi_1-\dfrac{\Gamma(\nu-\delta)}{\Gamma(\nu)}\chi_2}{\delta}=\frac{\Gamma(\nu-\delta)}{2i\pi}\int_{K_z}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}(z-t)^\nu}\left[\frac{(t-z)^\delta-1}{\delta}\right],$$

so gibt der Grenzübergang für $\delta=0$ die neue Particularlösung, die wir statt χ_1 nehmen,

$$\chi_1=\int_{K_z}\frac{l(t-z)\,dt}{\sqrt{1-t^2}(t-z)^\nu}.$$

Es kommt somit für diesen Fall statt 147):

$$\chi=c_1\int_{K_z}\frac{l(t-z)\,dt}{\sqrt{1-t^2}(t-z)^\nu}+c_2\overset{z}{D}{}^{\nu-1}\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}+c_3\int_{-1}^{+1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}(z-t)^\nu};\qquad n=\nu \qquad 147c)$$

der Integrationsweg K_z hat, wie gewöhnlich, von a auszugehen und eine Schlinge um z zu bilden, die die Punkte $t=\pm 1$ ausschliesst.

Demnach ist die Lösung von 146) unter allen Umständen durchgeführt.

3.

Die Function

$$f(z)=\frac{1}{(z-c)^p},$$

wo p eine beliebige complexe Zahl bedeute, hat den im Endlichen liegenden singulären Punkt $z=c$ und ist eine der im Paragraph 7 des vorigen Kapitels behandelten Functionen, weil ihre logarithmische Ableitung rational ist. Für einen einmaligen Umlauf der Variabelen z um den Punkt c im positiven Sinne hat man

$$\left\{\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\frac{1}{(z-c)^p}\right\}=e^{-2ip\pi}\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\frac{1}{(z-c)^p}+\frac{1}{\Gamma(-n)}\cdot\int_{K_c}\frac{dt}{(t-c)^p(z-t)^{n+1}};$$

für einen zweimaligen Umlauf dagegen

$$\left\{\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\frac{1}{(z-c)^p}\right\}=e^{-4ip\pi}\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\frac{1}{(z-c)^p}+\frac{1+e^{-2ip\pi}}{\Gamma(-n)}\cdot\int_{K_c}\frac{dt}{(t-c)^p(z-t)^{n+1}},$$

und ebenso für einen h-maligen Umlauf

$$\left\{\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\frac{1}{(z-c)^p}\right\}=e^{-2ihp\pi}\cdot\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\frac{1}{(z-c)^p}+\frac{1+e^{-2ip\pi}+\ldots+e^{2i(h-1)p\pi}}{\Gamma(-n)}\int_{K_c}\frac{dt}{(t-c)^p(z-t)^{n+1}}$$

$$=e^{-2ihp\pi}\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\frac{1}{(z-c)^p}+\frac{e^{-i(h-1)p\pi}}{\Gamma(-n)}\cdot\frac{\sin ph\pi}{\sin p\pi}\cdot\int_{K_c}\frac{dt}{(t-c)^p(z-t)^{n+1}}.$$

Das letzte Integral ist aber eine Derivation, nämlich

$$\int_{K_c}\frac{dt}{(t-c)^p(z-t)^{n+1}}=\frac{2i\pi}{\Gamma(p)}\cdot\frac{\Gamma(p)}{2i\pi}\cdot\int_{K_c}\frac{(z-t)^{-n-1}dt}{(t-c)^p}=\frac{2i\pi}{\Gamma(p)}\overset{t=c}{\underset{t=a}{D}}{}^{p-1}\frac{1}{(z-t)^{n+1}},$$

somit ist schliesslich

148) $$\left\{\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\frac{1}{(z-c)^p}\right\}_c^{\bar{t}}=e^{-2ihp\pi}\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\frac{1}{(z-c)^p}+\frac{2i\pi}{\Gamma(p)}\frac{e^{-i(h-1)p\pi}}{\Gamma(-n)}\cdot\frac{\sin ph\pi}{\sin p\pi}\overset{t=c}{\underset{t=a}{D}}{}^{p-1}\frac{1}{(z-t)^{n+1}}.$$

Ist p ganz und positiv $=\lambda+1$, so geht diese Gleichung in die unter 115) angegebene über.

Als lineare Differentialgleichung erster Ordnung für diese Derivation hat man nach 113), welche Gleichung auch für beliebige λ gilt,

$$(z-c)\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+1}\frac{1}{(z-c)^p}+(n+p)\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\frac{1}{(z-c)^p}=\frac{1}{\Gamma(-n)}\cdot\frac{1}{(a-c)^{p-1}(z-a)^{n+1}}.$$

Setzt man

$$^{n}\frac{1}{(z-c)^p}=\varphi,$$

so kann man dieselbe auch schreiben

$$(z-c)\frac{d\varphi}{dz}+(n+p)\varphi=\frac{1}{\Gamma(-n)}\cdot\frac{1}{(a-c)^{p-1}(z-a)^{n+1}}.$$

Daraus leitet man durch Differentiation leicht die homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung ab:

149) $$(z-a)(z-c)\frac{d^2\varphi}{dz^2}+[(n+p+1)(z-a)+(n+1)(z-c)]\frac{d\varphi}{dz}+(n+1)(n+p)\varphi=0.$$

Da hievon

$$\varphi = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \frac{1}{(z-c)^p}$$

eine Particularlösung ist, so lautet nach 148) die vollständige Lösung

$$\varphi = c_1 \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \frac{1}{(z-c)^p} + c_2 \overset{t=c}{\underset{t=a}{D}}{}^{p-1} \frac{1}{(z-t)^{n+1}}, \tag{150}$$

welche so lange allgemein gilt, als nicht $a = c$ oder n und p gleichzeitig ganz und positiv sind.

Ist $c = a$, so muss real $p < 1$ sein, damit die Function $\frac{1}{(z-a)^p}$ überhaupt zwischen den Grenzen a und z derivirbar sei; dann verschwindet aber die zweite Particularlösung, weil die Grenzen der Derivation zusammenfallen und der Index $p-1$ die Bedingung real$(p-1) < 0$ erfüllt. Die Gleichung 150) liefert dann nur mehr die einzige Particularlösung

$$\varphi_1 = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \frac{1}{(z-a)^p} = \frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(1-p-n)} \cdot \frac{1}{(z-a)^{p+n}} \qquad \text{real}(p-1) < 0$$

der nunmehrigen Differentialgleichung

$$(z-a)^2 \frac{d^2\varphi}{dz^2} + (2n+p+2)(z-a)\frac{d\varphi}{dz} + (n+1)(n+p)\varphi = 0,$$

deren vollständige Lösung bekanntlich ist:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{c_1}{(z-a)^{n+p}} + \frac{c_2}{(z-a)^{n+1}} && p \gtrless 1 \quad c = a \\ \varphi &= \frac{c_1 l(z-a) + c_2}{(z-a)^{n+1}} && p = 1 \quad c = a. \end{aligned}\right\} \tag{150a}$$

Im Falle die beiden Grössen n und p gleichzeitig ganz und positiv sind, werden in 150) die beiden Particularlösungen gleich; nun sei $n = \nu$ und $p = \lambda + 1$, wo λ und ν jede beliebige ganze positive Zahl (inclusive Null) sein können, dann nehmen wir

$$\varphi_1 = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{\nu-\delta} \frac{1}{(z-c)^{\lambda+1}}; \qquad \varphi_2 = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{\nu} \frac{1}{(z-c)^{\lambda+1}}$$

und benützen wieder das Curvenintegral 29), dann kommt:

$$\varphi_1 = \frac{\Gamma(\nu-\delta+1)}{2i\pi} \int_{K_z} \frac{(t-z)^\delta\, dt}{(t-c)^{\lambda+1}(t-z)^{\nu+1}}; \qquad \varphi_2 = \frac{\Gamma(\nu+1)}{2i\pi} \int_{K_z} \frac{dt}{(t-c)^{\lambda+1}(t-z)^{\nu+1}};$$

und hieraus

$$\frac{\varphi_1 - \dfrac{\Gamma(\nu-\delta+1)}{\Gamma(\nu+1)}\varphi_2}{\delta} = \frac{\Gamma(\nu-\delta+1)}{2i\pi} \int_{K_z} \frac{dt}{(t-c)^{\lambda+1}(t-z)^{\nu+1}} \left[\frac{(t-z)^\delta - 1}{\delta}\right],$$

woraus durch Übergang zur Grenze für unendlich abnehmende δ die neue Particularlösung folgt, die wir statt φ_1 nehmen,

$$\varphi_1 = \int_{K_z} \frac{l(t-z)\, dt}{(t-c)^{\lambda+1}(t-z)^{\nu+1}},$$

so dass jetzt statt 150) zu schreiben ist:

$$\varphi = c_1 \int_{K_z} \frac{l(t-z)dt}{(t-c)^{\lambda+1}(t-z)^{\nu+1}} + \frac{c_2}{(z-c)^{\lambda+\nu+1}}. \qquad \begin{aligned} n &= \nu \\ p &= \lambda+1. \end{aligned} \tag{150b}$$

Schliesslich bemerken wir noch, dass unter allen Umständen

$$\frac{1}{(z-c)^{p+n}}$$

eine Particularlösung von 149) ist; wir müssen daraus auf eine lineare Beziehung zwischen

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\frac{1}{(z-c)^{p}},\qquad \overset{t=c}{\underset{t=a}{D}}{}^{p-1}\frac{1}{(z-t)^{n+1}},\qquad \frac{1}{(z-c)^{p+n}}$$

schliessen. Dieselbe findet nun in der That statt und lautet

$$\frac{1}{\Gamma(1-p)}\cdot\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\frac{1}{(z-c)^{p}}+\frac{(-1)^{p-1}}{\Gamma(-n)}\overset{t=c}{\underset{t=a}{D}}{}^{p-1}\frac{1}{(z-t)^{n+1}}=\frac{1}{\Gamma(1-n-p)}\cdot\frac{1}{(z-c)^{p+n}};$$

den Beweis hiefür überlassen wir jedoch dem Leser.

4.

Eine ähnliche Function, wie die im vorigen Paragraphe behandelte, ist die folgende

$$f(z)=z^{p}(1-z)^{q},$$

welche die Ausnahmepunkte $z=0$ und $z=1$ hat. Der allgemeinste Werth der Derivation dieser Function ist nach Gleichung 124)

$$151)\quad \left\{\begin{aligned}\left\{\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}z^{p}(1-z)^{q}\right\}&=e^{2i\pi(hp+kq)}\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}z^{p}(1-z)^{q}+\frac{2i\pi A}{\Gamma(-n)\Gamma(-p)}\overset{t=0}{\underset{t=a}{D}}{}^{-p-1}\frac{(1-t)^{q}}{(z-t)^{n+1}}\\&+\frac{2i\pi B}{\Gamma(-n)\Gamma(-q)}\cdot\overset{t=1}{\underset{t=a}{D}}{}^{-q-1}\frac{t^{p}}{(z-t)^{n+1}},\end{aligned}\right.$$

wenn die Variabele z den Punkt $z=0$ h-mal und den Punkt $z=1$ k-mal umläuft. Hiebei sind A und B zwei Constante, die nur von der Art und Anzahl dieser Umläufe, nicht aber von z abhängen, und auf deren genaueren expliciten Ausdruck es uns im Folgenden nicht ankommt. Wir wollen vielmehr sogleich zu einer linearen Differentialgleichung für diese Derivation schreiten.

Die lineare Differentialgleichung für

$$\omega=z^{p}(1-z)^{q}$$

lautet, wenn man der Kürze wegen $\frac{d\omega}{dz}=\omega'$ setzt,

$$z(1-z)\omega'+[(p+q)z-p]\omega=0.$$

Derivirt man diese Differentialgleichung nach der im vorletzten Paragraphen gezeigten Methode, so kommt, wenn zur Abkürzung

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-1}\omega=\psi$$

gesetzt wird:

$$152)\qquad z(1-z)\frac{d^{2}\psi}{dz^{2}}+[(p+q-2n)z+n-p]\frac{d\psi}{dz}+n(p+q-n+1)\psi=\frac{a^{p+1}(1-a)^{q+1}}{\Gamma(-n)(z-a)^{n+1}},$$

und dazu gehört vermöge der Herleitung die Particularlösung

$$\psi=\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-1}z^{p}(1-z)^{q}.$$

Bevor wir aber diese Differentialgleichung mit Hilfe der Gleichung 151) vollständig lösen, wollen wir statt der Constanten p, q und n drei andere Constanten α, β und γ mittelst der Gleichungen

$$p+q-2n=-\alpha-\beta-1$$
$$n-p=\gamma$$
$$n(p+q-n+1)=-\alpha\beta$$

einführen. Daraus resultiren die beiden Werthesysteme

$$\begin{array}{ll} n=\alpha & \text{oder } n=\beta \\ p=\alpha-\gamma & \quad p=\beta-\gamma \\ q=\gamma-\beta-1 & \quad q=\gamma-\alpha-1, \end{array}$$

die sich von einander durch die Vertauschung von α und β unterscheiden. Man erhält aus 152) die beiden Differentialgleichungen

$$z(1-z)\frac{d^2\psi^{(1)}}{dz^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]\frac{d\psi^{(1)}}{dz}-\alpha\beta\psi^{(1)}=\frac{a^{\alpha-\gamma+1}(1-a)^{\gamma-\beta}}{\Gamma(-\alpha)(z-a)^{\alpha+1}} \tag{153}$$

$$z(1-z)\frac{d^2\psi^{(2)}}{dz^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]\frac{d\psi^{(2)}}{dz}-\alpha\beta\psi^{(2)}=\frac{a^{\beta-\gamma+1}(1-a)^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(-\beta)(z-a)^{\beta+1}} \tag{154}$$

mit den Particularlösungen beziehungsweise

$$\psi^{(1)}=\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{\alpha-1}\,z^{\alpha-\gamma}(1-z)^{\gamma-\beta-1} \tag{155}$$

$$\psi^{(2)}=\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{\beta-1}\,z^{\beta-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-1}. \tag{156}$$

Diese Differentialgleichungen, sowie auch ihre zugehörigen Particularlösungen gehen in einander über, wenn man α mit β vertauscht, sie sind also von einander eigentlich nicht wesentlich verschieden; doch wollen wir der Bequemlichkeit wegen beide Gleichungen neben einander beibehalten.

Reducirt sich in den Differentialgleichungen 153) und 154) die rechte Seite auf Null, so möge linker Hand φ statt ψ geschrieben werden, also

$$z(1-z)\frac{d^2\varphi}{dz^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]\frac{d\varphi}{dz}-\alpha\beta\varphi=0. \tag{157}$$

Um zunächst diese Differentialgleichung zu lösen, bemerke man, dass vermöge 151) die allgemeinsten Werthe von $\psi^{(1)}$ und $\psi^{(2)}$ die folgenden sind:

$$\psi^{(1)}=A'\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{\alpha-1}z^{\alpha-\gamma}(1-z)^{\gamma-\beta-1}+B'\overset{t=0}{\underset{t=a}{D}}{}^{\gamma-\alpha-1}\frac{(1-t)^{\gamma-\beta-1}}{(z-t)^{\alpha}}+C'\overset{t=1}{\underset{t=a}{D}}{}^{\beta-\gamma}\frac{t^{\alpha-\gamma}}{(z-t)^{\alpha}}$$

$$\psi^{(2)}=A''\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{\beta-1}z^{\beta-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-1}+B''\overset{t=0}{\underset{t=a}{D}}{}^{\gamma-\beta-1}\frac{(1-t)^{\gamma-\alpha-1}}{(z-t)^{\beta}}+C''\overset{t=1}{\underset{t=a}{D}}{}^{\alpha-\gamma}\frac{t^{\beta-\gamma}}{(z-t)^{\beta}},$$

wo die Constanten A, B, C unter einander und auf gewisse Weise auch von α, β und γ abhängen. Ist die untere Grenze a beliebig, so haben also die Derivationen $\psi^{(1)}$ und $\psi^{(2)}$ ausser der eindeutig genommenen Derivation noch zwei Abzweigungen; von diesen beiden Abzweigungen kann aber die eine oder die andere verschwinden, wenn man beziehungsweise $a=0$ oder $a=1$ setzt. Setzt man die untere Grenze $a=0$, so muss in $\psi^{(1)}$ real$(\alpha-\gamma+1)>0$ sein, damit die Function $z^{\alpha-\gamma}(1-z)^{\gamma-\beta-1}$ überhaupt derivirbar ist. Dann verschwindet aber die mit B' multiplicirte Derivation und es bleibt:

$$\psi^{(1)}=A'\overset{z}{\underset{0}{D}}{}^{\alpha-1}z^{\alpha-\gamma}(1-z)^{\gamma-\beta-1}+C'\overset{t=1}{\underset{t=0}{D}}{}^{\beta-\gamma}\frac{t^{\alpha-\gamma}}{(z-t)^{\alpha}}\qquad \text{real}(\alpha-\gamma+1)>0,$$

und ebenso ist

$$\psi^{(2)} = A'' \overset{z}{\underset{0}{D}}{}^{\beta-1} z^{\beta-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-1} + C'' \overset{t=1}{\underset{t=0}{D}}{}^{\alpha-\gamma} \frac{t^{\beta-\gamma}}{(z-t)^{\beta}} \qquad \text{real}\,(\beta-\gamma+1) > 0,$$

und ähnlich für $a = 1$

$$\psi^{(1)} = A' \overset{z}{\underset{1}{D}}{}^{\alpha-1} z^{\alpha-\gamma}(1-z)^{\gamma-\beta-1} + B' \overset{t=0}{\underset{t=1}{D}}{}^{\gamma-\alpha-1} \frac{(1-t)^{\gamma-\beta-1}}{(z-t)^{\alpha}} \qquad \text{real}\,(\gamma-\beta) > 0,$$

$$\psi^{(2)} = A'' \overset{z}{\underset{1}{D}}{}^{\beta-1} z^{\beta-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-1} + B'' \overset{t=0}{\underset{t=1}{D}}{}^{\gamma-\beta-1} \frac{(1-t)^{\gamma-\alpha-1}}{(z-t)^{\beta}} \qquad \text{real}\,(\gamma-\alpha) > 0.$$

Genau unter diesen Bedingungen für α, β, γ und a geht aber immer eine von den beiden Differentialgleichungen (153) und 154) in die homogene Differentialgleichung 157) über, daher ist

$$\begin{aligned} \varphi &= \psi^{(1)} \quad \text{für } a = 0; \qquad \text{real}\,(\alpha-\gamma+1) > 0 \\ &= \psi^{(2)} \quad \text{für } a = 0; \qquad \text{real}\,(\beta-\gamma+1) > 0 \\ &= \psi^{(1)} \quad \text{für } a = 1; \qquad \text{real}\,(\gamma-\beta) > 0 \\ &= \psi^{(2)} \quad \text{für } a = 1; \qquad \text{real}\,(\gamma-\alpha) > 0. \end{aligned}$$

Da nun aber die Differentialgleichung 157) homogen ist, so kann man an Stelle der in $\psi^{(1)}$ und $\psi^{(2)}$ vorkommenden, zwar nicht ganz willkürlichen Constanten A', A'' u. s. w. nunmehr willkürliche Constanten setzen, und somit lautet die Lösung von 157):

$$158)\left\{\begin{aligned} \varphi &= c_1 \overset{z}{\underset{0}{D}}{}^{\alpha-1} z^{\alpha-\gamma}(1-z)^{\gamma-\beta-1} + c_2 \overset{t=1}{\underset{t=0}{D}}{}^{\beta-\gamma} \frac{t^{\alpha-\gamma}}{(z-t)^{\alpha}} \qquad \text{real}\,(\alpha-\gamma+1) > 0 \\ \varphi &= c_1 \overset{z}{\underset{0}{D}}{}^{\beta-1} z^{\beta-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-1} + c_2 \overset{t=1}{\underset{t=0}{D}}{}^{\alpha-\gamma} \frac{t^{\beta-\gamma}}{(z-t)^{\beta}} \qquad \text{real}\,(\beta-\gamma+1) > 0 \\ \varphi &= c_1 \overset{z}{\underset{1}{D}}{}^{\alpha-1} z^{\alpha-\gamma}(1-z)^{\gamma-\beta-1} + c_2 \overset{t=0}{\underset{t=1}{D}}{}^{\gamma-\alpha-1} \frac{(1-t)^{\gamma-\beta-1}}{(z-t)^{\alpha}} \qquad \text{real}\,(\gamma-\beta) > 0 \\ \varphi &= c_1 \overset{z}{\underset{1}{D}}{}^{\beta-1} z^{\beta-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-1} + c_2 \overset{t=0}{\underset{t=1}{D}}{}^{\gamma-\beta-1} \frac{(1-t)^{\gamma-\alpha-1}}{(z-t)^{\beta}} \qquad \text{real}\,(\gamma-\alpha) > 0. \end{aligned}\right.$$

Man sieht, dass hiemit alle möglichen Fälle erschöpft sind, da von den vier Zusatzbedingungen immer eine erfüllt sein muss; ja es sind sogar immer wenigstens zwei erfüllt, und das führt auf lineare Beziehungen zwischen den vorkommenden Derivationen, die man a posteriori verificiren kann, wenn man zu den betreffenden Integraldarstellungen übergeht.

Wir können indess diese Lösungen 158) auch noch in eine andere Form bringen. Setzt man z. B. real $(1-\alpha) > 0$ voraus, so hat man durch Integraldarstellung

$$\overset{z}{\underset{0}{D}}{}^{\alpha-1} z^{\alpha-\gamma}(1-z)^{\gamma-\beta-1} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^z \frac{t^{\alpha-\gamma}(1-t)^{\gamma-\beta-1}}{(z-t)^{\alpha}}\, dt,$$

und wenn man jetzt rechter Hand $t = \frac{z-u}{1-u}$; $dt = -\frac{1-z}{(1-u)^2}\, du$ substituirt, und dann wieder t statt u schreibt:

$$\overset{z}{\underset{0}{D}}{}^{\alpha-1} z^{\alpha-\gamma}(1-z)^{\gamma-\beta-1} = \frac{(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^z \frac{t^{-\alpha}(1-t)^{\beta-1}}{(z-t)^{\gamma-\alpha}}\, dt,$$

oder

$$\overset{z}{\underset{0}{D}}{}^{\alpha-1} z^{\alpha-\gamma}(1-z)^{\gamma-\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}{\Gamma(1-\alpha)}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\,\overset{z}{\underset{0}{D}}{}^{\gamma-\alpha-1} z^{-\alpha}(1-z)^{\beta-1}$$

$$\text{real}\,(\alpha-\gamma+1) > 0; \qquad \text{real}\,(1-\alpha) > 0.$$

Ebenso findet man:

$$\overset{z}{\underset{0}{D}}{}^{\beta-1} z^{\beta-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-1} = \frac{\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(1-\beta)}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\,\overset{z}{\underset{0}{D}}{}^{\gamma-\beta-1} z^{-\beta}(1-z)^{\alpha-1}$$

$$\text{real}\,(\beta-\gamma+1) > 0; \qquad \text{real}\,(1-\beta) > 0.$$

Desgleichen ist:

$$\overset{z}{\underset{1}{D}}{}^{\alpha-1} z^{\alpha-\gamma}(1-z)^{\gamma-\beta-1} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_1^z \frac{t^{\alpha-\gamma}(1-t)^{\gamma-\beta-1}}{(z-t)^{\alpha}}\,dt$$

und mittelst der Substitution $t=\frac{z}{u}$; $dt=-\frac{z}{u^2}\,du$ und wieder t für u geschrieben:

$$\overset{z}{\underset{1}{D}}{}^{\alpha-1} z^{\alpha-\gamma}(1-z)^{\gamma-\beta-1} = (-1)^{\gamma-\alpha-\beta-1}\frac{z^{1-\gamma}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_1^z \frac{t^{\beta-1}(1-t)^{-\alpha}}{(z-t)^{\beta-\gamma+1}},$$

oder

$$\overset{z}{\underset{1}{D}}{}^{\alpha-1} z^{\alpha-\gamma}(1-z)^{\gamma-\beta-1} = (-1)^{\gamma-\alpha-\beta-1}\frac{\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)} z^{1-\gamma}\,\overset{z}{\underset{1}{D}}{}^{\beta-\gamma} z^{\beta-1}(1-z)^{-\alpha}$$

$$\text{real}\,(\gamma-\beta) > 0; \qquad \text{real}\,(1-\alpha) > 0;$$

und auf analoge Weise ergibt sich:

$$\overset{z}{\underset{1}{D}}{}^{\beta-1} z^{\beta-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-1} = (-1)^{\gamma-\alpha-\beta-1}\frac{\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(1-\beta)} z^{1-\gamma}\,\overset{z}{\underset{1}{D}}{}^{\alpha-\gamma} z^{\alpha-1}(1-z)^{-\beta}$$

$$\text{real}\,(\gamma-\alpha) > 0; \qquad \text{real}\,(1-\beta) > 0.$$

Wir haben somit die ersten vier Derivationen, die unter 158) vorkommen, durch ähnliche Derivationen ausgedrückt. Berechnet man zu diesen noch den einen Zweig nach 151) (denn der andere ist wieder Null), so hat man das neue Lösungssystem:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi &= (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\Big\{c_1\,\overset{z}{\underset{0}{D}}{}^{\gamma-\alpha-1} z^{-\alpha}(1-z)^{\beta-1} + c_2\,\overset{t=1}{\underset{t=0}{D}}{}^{-\beta}\frac{t^{-\alpha}}{(z-t)^{\gamma-\alpha}}\Big\} && \text{real}\,(1-\alpha)>0\\
\varphi &= (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\Big\{c_1\,\overset{z}{\underset{0}{D}}{}^{\gamma-\beta-1} z^{-\beta}(1-z)^{\alpha-1} + c_2\,\overset{t=1}{\underset{t=0}{D}}{}^{-\alpha}\frac{t^{-\beta}}{(z-t)^{\gamma-\beta}}\Big\} && \text{real}\,(1-\beta)>0\\
\varphi &= z^{1-\gamma}\Big\{c_1\,\overset{z}{\underset{1}{D}}{}^{\beta-\gamma} z^{\beta-1}(1-z)^{-\alpha} + c_2\,\overset{t=0}{\underset{t=1}{D}}{}^{-\beta}\frac{(1-t)^{-\alpha}}{(z-t)^{\beta-\gamma+1}}\Big\} && \text{real}\,(1-\alpha)>0\\
\varphi &= z^{1-\gamma}\Big\{c_1\,\overset{z}{\underset{1}{D}}{}^{\alpha-\gamma} z^{\alpha-1}(1-z)^{-\beta} + c_2\,\overset{t=0}{\underset{t=1}{D}}{}^{-\alpha}\frac{(1-t)^{-\beta}}{(z-t)^{\alpha-\gamma+1}}\Big\} && \text{real}\,(1-\beta)>0,
\end{aligned}\right\} \quad 159)$$

welches jedoch vollständig unbrauchbar ist, wenn von den beiden Bedingungen real $(1-\alpha)>0$ und real $(1-\beta)>0$ etwa gar keine erfüllt ist, was ja vorkommen kann. Wir suchen zu diesem Zwecke noch ein drittes Lösungssystem der homogenen Differentialgleichung 157) auf, welches das System 159) in Bezug auf die Giltigkeitsbedingungen ergänzt.

Lässt man in 151) die untere Grenze a nach ∞ convergiren, was nach 71) unter der Voraussetzung real$(n-p-q)>0$ für jedes ε gestattet ist, so erhält man ein Resultat von der Form

$$\left\{\overset{z}{\underset{\infty}{D}}{}^{n}\, z^p(1-z)^q\right\} = A'\overset{z}{\underset{\infty}{D}}{}^{n}\, z^p(1-z)^q + B'\overset{t=1}{\underset{t=\infty}{D}}{}^{-p-1}\frac{(1-t)^q}{(z-t)^{n+1}} + C'\overset{t=1}{\underset{t=\infty}{D}}{}^{-q-1}\frac{t^p}{(z-t)^{n+1}};$$

und nun wollen wir zeigen, dass zwischen den drei Derivationen rechter Hand eine lineare Beziehung besteht. In der That ist für einen unendlich grossen um den Nullpunkt beschriebenen Kreis Ω als Integrationsweg

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi}\int_{\Omega}\frac{t^p(1-t)^q}{(t-z)^{n+1}}\,dt = 0 \qquad\qquad \text{real}\,(n-p-q)>0,$$

weil jedes Element des Integranden unter der gemachten Voraussetzung real$(n-p-q)>0$ verschwindet. Nun lässt sich aber dieser Integrationsweg Ω ersetzen durch die drei Schlingen Ω_z, Ω_0 und Ω_1, welche auf demselben Blatte liegen, daher ist auch

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi}\int_{\Omega_z}\frac{t^p(1-t)^q}{(t-z)^{n+1}}\,dt + \frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi}\int_{\Omega_0}\frac{t^p(1-t)^q}{(t-z)^{n+1}}\,dt + \frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi}\int_{\Omega_1}\frac{t^p(1-t)^q}{(z-t)^{n+1}} = 0,$$

und durch Derivationen ausgedrückt erhält man leicht mit Hinzusetzung des Factors $\dfrac{e^{i(n+1)\pi}}{\Gamma(n+1)}$:

160) $$\frac{e^{i(n+1)\pi}}{\Gamma(n+1)}\overset{z}{\underset{\infty}{D}}{}^{n}\, z^p(1-z)^q + \frac{1}{\Gamma(-p)}\overset{t=0}{\underset{t=\infty}{D}}{}^{-p-1}\frac{(1-t)^q}{(t-z)^{n+1}} + \frac{e^{iq\pi}}{\Gamma(-q)}\cdot\overset{t=1}{\underset{t=\infty}{D}}{}^{-q-1}\frac{t^p}{(z-t)^{n+1}} = 0$$

als die verlangte lineare Beziehung.

Setzt man nun in 153) und 155) real$\beta>0$, desgleichen in 154) und 156) real$\alpha>0$ voraus, und lässt man a nach ∞ convergiren, so werden die beiden Differentialgleichungen homogen und mit 157) identisch; die Lösungen lauten daher

161) $$\left\{\begin{aligned}
\varphi &= c_1\overset{z}{\underset{\infty}{D}}{}^{\alpha-1} z^{\alpha-\gamma}(1-z)^{\gamma-\beta-1} + c_2\overset{t=0}{\underset{t=\infty}{D}}{}^{\gamma-\alpha-1}\frac{(1-t)^{\gamma-\beta-1}}{(z-t)^{\alpha}} + c_3\overset{t=0}{\underset{t=\infty}{D}}{}^{\beta-\gamma}\frac{t^{\alpha-\gamma}}{(z-t)^{\gamma}} & \qquad \text{real}\,\beta>0\\
\varphi &= c_1\overset{z}{\underset{\infty}{D}}{}^{\beta-1} z^{\beta-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-1} + c_2\overset{t=0}{\underset{t=\infty}{D}}{}^{\gamma-\beta-1}\frac{(1-t)^{\gamma-\alpha-1}}{(z-t)^{\beta}} + c_3\overset{t=0}{\underset{t=\infty}{D}}{}^{\alpha-\gamma}\frac{t^{\beta-\gamma}}{(z-t)^{\alpha}} & \qquad \text{real}\,\alpha>0.
\end{aligned}\right.$$

Die drei Particularlösungen reduciren sich wegen 160) auf blos zwei. Dieses System 161) ergänzt das unter 159) angegebene. Auch das System 161) lässt sich umformen. Setzt man nämlich real$\,n<0$ voraus, so hat man durch Integraldarstellung

$$\overset{z}{\underset{\infty}{D}}{}^{n}\, z^p(1-z)^q = \frac{1}{\Gamma(-n)}\int_{\infty}^{z}\frac{t^p(1-t)^q}{(z-t)^{n+1}}\,dt,$$

und hier gibt die Substitution $t = z\dfrac{1-u}{z-u}$; $dt = z\dfrac{1-z}{(z-u)^2}\,du$, wenn man wieder t statt u schreibt,

$$\overset{z}{\underset{\infty}{D}}{}^{n}\, z^p(1-z)^q = \frac{e^{i(q+n)\pi}}{\Gamma(-n)}\, z^{p-n}(1-z)^{q-n}\int_{\infty}^{z}\frac{t^q(1-t)^p\,dt}{(z-t)^{p+q-n+1}}$$

wofür auch geschrieben werden kann

162) $$\overset{z}{\underset{\infty}{D}}{}^{n}\, z^p(1-z)^q = e^{i(q+n)\pi}.\frac{\Gamma(n-p-q)}{\Gamma(-n)}\cdot z^{p-n}(1-z)^{q-n}\overset{z}{\underset{\infty}{D}}{}^{p+q-n}\, z^q(1-z)^p$$

$$\text{real}\,(n-p-q)>0; \qquad \text{real}\,n<0.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung transformirt man leicht 161) um, und erhält

$$\left.\begin{aligned}
\varphi &= z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\left\{c_1 \overset{z}{\underset{\infty}{D}}{}^{-\beta} z^{\gamma-\beta-1}(1-z)^{\alpha-\gamma} + c_2 \overset{t=0}{\underset{t=\infty}{D}}{}^{\beta-\gamma} \frac{(1-t)^{\alpha-\gamma}}{(z-t)^{1-\beta}} + c_3 \overset{t=1}{\underset{t=\infty}{D}}{}^{\gamma-\alpha-1} \frac{t^{\gamma-\beta-1}}{(z-t)^{1-\beta}}\right\} \\
&\qquad \text{real } (1-\alpha) > 0 \\
\varphi &= z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\left\{c_1 \overset{z}{\underset{\infty}{D}}{}^{-\alpha} z^{\gamma-\alpha-1}(1-z)^{\beta-\gamma} + c_2 \overset{t=0}{\underset{t=\infty}{D}}{}^{\alpha-\gamma} \frac{(1-t)^{\beta-\gamma}}{(z-t)^{1-\alpha}} + c_3 \overset{t=1}{\underset{t=\infty}{D}}{}^{\gamma-\beta-1} \frac{t^{\gamma-\alpha-1}}{(z-t)^{1-\alpha}}\right\} \\
&\qquad \text{real } (1-\beta) > 0.
\end{aligned}\right\} \tag{163}$$

Die drei Particularlösungen reducieren sich wieder vermöge 160) auf blos zwei, und in Bezug auf die Zusatzbedingungen ergänzen sich die beiden Systeme 161) und 163).

So verlockend es ist, jetzt zur hypergeometrischen Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ überzugehen, und deren Theorie mit den Derivationen zu verbinden, so soll es hier doch unterbleiben, weil es zu weit führen würde.

Für die Differentialgleichungen 153) und 154) lauten jetzt die vollständigen Lösungen:

$$\left.\begin{aligned}
\psi^{(1)} &= \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{\alpha-1} z^{\alpha-\gamma}(1-z)^{\gamma-\beta-1} + \varphi \\
\psi^{(2)} &= \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{\beta-1} z^{\beta-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-1} + \varphi,
\end{aligned}\right\} \tag{164}$$

worin für φ die Werthe aus 158), 159), 161) oder 163) zu nehmen sind, je nachdem in 153) und 154) die Grössen α, β und γ der einen oder der andern Bedingung genügen.

Noch wäre zu erwähnen, dass man aus 153) oder 154) durch nochmalige Differentiation zwei homogene Differentialgleichungen dritter Ordnung bilden und ihre Lösungen vollständig angeben kann; die Ausführung mag aber übergangen werden.

5.

Um ein Beispiel für die Derivation ganzer transscendenter Functionen zu haben, betrachten wir die einfachen Fälle

$$f(z) = \cos z \text{ und } f(z) = \sin z.$$

Hiefür geben die Entwicklungen 130), wenn man der Einfachheit wegen $a = 0$ annimmt,

$$\left.\begin{aligned}
\overset{z}{\underset{0}{D}}{}^{n} \cos z &= -\frac{1}{\Gamma(-n)}\cdot\frac{1}{z^n}\, U_1(z) = -\frac{1}{\Gamma(-n)}\cdot\frac{1}{z^n}\,[U_3(z)\cos z + U_4(z)\sin z] \\
\overset{z}{\underset{0}{D}}{}^{n} \sin z &= -\frac{1}{\Gamma(-n)}\cdot\frac{1}{z^n}\, U_2(z) = -\frac{1}{\Gamma(-n)}\cdot\frac{1}{z^n}\,[U_3(z)\sin z - U_4(z)\cos z].
\end{aligned}\right\} \tag{165}$$

Die Functionen U sind durch folgende Gleichungen definirt:

$$\left.\begin{aligned}
U_1(z) &= \frac{1}{n} - \frac{z^2}{n(1-n)(2-n)} + \frac{z^4}{n(1-n)(2-n)(3-n)(4-n)} - \cdots \\
U_2(z) &= \frac{z}{n(1-n)} - \frac{z^3}{n(1-n)(2-n)(3-n)} + \cdots \\
U_3(z) &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n-2}\cdot\frac{z^2}{1.2} + \frac{1}{n-4}\cdot\frac{z^4}{1.2.3.4} - \cdots \\
U_4(z) &= \frac{1}{n-1}\cdot\frac{z}{1} - \frac{1}{n-3}\cdot\frac{z^3}{1.2.3} + \frac{1}{n-5}\cdot\frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \cdots
\end{aligned}\right\} \tag{166}$$

Obwohl diese Functionen U für ganze positive n unendlich und unstetig werden, so sind die Derivationen 165) für alle z und n doch endlich und stetig, weil bei ihnen der Factor $\frac{1}{\Gamma(-n)}$ auftritt, der für die genannten Werthe von n verschwindet.

Die U, als Functionen von z betrachtet, haben bemerkenswerthe Eigenschaften, von denen einige hier Platz finden mögen. Zunächst folgt aus 165)

167)
$$\begin{aligned} U_3(z)\cos z + U_4(z)\sin z &= U_1(z) \\ U_3(z)\sin z - U_4(z)\cos z &= U_2(z), \end{aligned}$$

und hieraus ziehen wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} U_1(z)\cos z + U_2(z)\sin z &= U_3(z) \\ U_1(z)\sin z - U_2(z)\cos z &= U_4(z), \end{aligned}$$

welche zusammengefasst lauten:

168)
$$e^{iz} = \frac{U_1(z)+iU_2(z)}{U_3(z)-iU_4(z)} = \frac{U_3(z)+iU_4(z)}{U_1(z)-iU_2(z)}.$$

Vermöge dieser letzten Gleichung ist stets

169)
$$U_1^2(z) + U_2^2(z) = U_3^2(z) + U_4^2(z).$$

Führt man drei Hilfsgrössen ρ, α, γ ein, so kann man hiefür schreiben

$$\begin{aligned} U_1(z) &= \rho\sin\alpha & \qquad -U_3(z) &= \rho\sin\gamma \\ -U_2(z) &= \rho\cos\alpha & \qquad U_4(z) &= \rho\cos\gamma. \end{aligned}$$

Dabei werden ρ, α und γ natürlich gewisse Functionen von z und n sein. Macht man diese Substitutionen in 167), so wird $\alpha = z - \gamma$ und die beiden Gleichungen 167) lassen sich ersetzen durch

170)
$$U_1(z):\ U_2(z):\ U_3(z):\ U_4(z) = \sin(z-\gamma): -\cos(z-\gamma): -\sin\gamma: \cos\gamma.$$

Setzt man in 167) $z = \frac{2h+1}{2}\pi$ und $z = h\pi$, so wird

$$\begin{aligned} U_1\left(\frac{2h+1}{2}\right) &= (-1)^h U_4\left(\frac{2h+1}{2}\right); & \qquad U_1(h\pi) &= (-1)^h U_3(h\pi) \\ U_2\left(\frac{2h+1}{2}\right) &= (-1)^h U_3\left(\frac{2h+1}{2}\right); & \qquad U_2(h\pi) &= (-1)^{h-1} U_4(h\pi). \end{aligned}$$

Für sich betrachtet, sind die U nicht periodisch, doch lassen sich leicht Quotienten bilden, die periodisch sind. Solche Quotienten bildet man am leichtesten aus 170), wenn man γ eliminirt. So ist z. B.

$$\frac{U_1(z)\,U_4(z) + U_2(z)\,.\,U_3(z)}{U_1^2(z) + U_2^2(z)} = \frac{U_1(z)\,U_2(z) + U_3(z)\,.\,U_4(z)}{U_1(z)\,U_3(z) + U_2(z)\,.\,U_4(z)} = \frac{U_1^2(z) - U_3^2(z)}{U_1(z)\,U_4(z) - U_2(z)\,.\,U_3(z)} = \sin z$$

$$\frac{U_1(z)\,U_3(z) - U_2(z)\,.\,U_4(z)}{U_1^2(z) + U_2^2(z)} = \frac{U_1^2(z) - U_4^2(z)}{U_1(z)\,U_3(z) + U_2(z)\,.\,U_4(z)} = \frac{U_1(z)\,U_2(z) + U_3(z)\,.\,U_4(z)}{-U_1(z)\,U_4(z) + U_2(z)\,.\,U_3(z)} = \cos z$$

$$\frac{U_1(z) - U_3(z)}{-U_2(z) + U_4(z)} = \frac{U_2(z) + U_4(z)}{U_1(z) + U_3(z)} = \operatorname{tang}\frac{z}{2}$$

$$\frac{U_1(z) + U_4(z)}{-U_2(z) + U_3(z)} = \frac{U_2(z) + U_3(z)}{U_1(z) - U_4(z)} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right)$$

u. dergl. Aus 167) findet man auch

$$[U_3^2(z)-U_4^2(z)]\cos 2z+2\,U_3(z)\,U_4(z)\sin 2z=U_1^2(z)-U_2^2(z)$$
$$[U_3^2(z)-U_4^2(z)]\sin 2z-2\,U_3(z)\,U_4(z)\cos 2z=2\,U_1(z)\,U_2(z).$$

Ersetzt man hierin z durch $\frac{z}{2}$, so hat man zwei Gleichungen, deren Bau mit denen in 167) vollständig analog ist. Wir schliessen daraus, dass alle aus 167) abgeleiteten Relationen neue giltige Relationen liefern, wenn man darin

$$U_1(z);\qquad U_2(z);\qquad U_3(z);\qquad U_4(z),$$

folgeweise durch

$$U_1^2\left(\frac{z}{2}\right)-U_2^2\left(\frac{z}{2}\right);\qquad 2\,U_1\left(\frac{z}{2}\right)U_2\left(\frac{z}{2}\right);\qquad U_3^2\left(\frac{z}{2}\right)-U_4^2\left(\frac{z}{2}\right);\qquad 2\,U_3\left(\frac{z}{2}\right)U_4\left(\frac{z}{2}\right)$$

ersetzt. Differenzirt man die Gleichungen 167) nach z, so kommt

$$U_3'(z)\cos z+U_4'(z)\sin z=U_1'(z)+U_2(z)$$
$$U_3'(z)\sin z-U_4'(z)\cos z=U_2'(z)-U_1(z),$$

wobei der Kürze wegen U' für $\frac{\partial}{\partial z}U$ gesetzt wurde. Ebenso findet man:

$$U_1'(z)\cos z+U_2'(z)\sin z=U_3'(z)+U_4(z)$$
$$U_1'(z)\sin z-U_2'(z)\cos z=U_4'(z)-U_3(z).$$

Wir schliessen hieraus ähnlich, dass alle aus 167) abgeleiteten Relationen bestehen bleiben, wenn man darin

$$U_1(z);\qquad U_2(z);\qquad U_3(z);\qquad U_4(z)$$

folgeweise durch

$$U_1'(z)+U_2(z);\qquad U_2'(z)-U_1(z);\qquad U_3'(z);\qquad U_4'(z),$$

oder auch durch

$$U_1'(z);\qquad U_2'(z);\qquad U_3'(z)+U_4(z);\qquad U_4'(z)-U_3(z)$$

ersetzt. Alle diese Gleichungen gelten für jedes n.

Die Functionen U genügen auch einfachen Differentialgleichungen. Um dieselben zu erhalten, multipliciren wir die Gleichungen 166) sämmtlich mit z^{-n} und differenziren einmal nach z, dann wird

$$\begin{aligned}
z\,U_1'(z)-n\,U_1(z)+z\,U_2(z)+1&=0\\
z\,U_2'(z)-n\,U_2(z)-z\,U_1(z)&=0\\
z\,U_3'(z)-n\,U_3(z)+\cos z&=0\\
z\,U_4'(z)-n\,U_4(z)+\sin z&=0.
\end{aligned}$$

Setzt man die sich aus den letzten beiden Gleichungen für $\cos z$ und $\sin z$ ergebenden Werthe in die beiden Gleichungen 167), so erhält man daraus

$$U_1(z)=n\,[U_3^2(z)+U_4^2(z)]-z\,[U_3(z)\,U_3'(z)+U_4(z)\,U_4'(z)],$$

was man auch schreiben kann

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{U_3^2(z)+U_4^2(z)}{z^{2n}}\right]=-\frac{2\,U_1(z)}{z^{2n+1}}.$$

Diese Gleichung lässt sich integriren, wenn man rechter Hand für $U_1(z)$ die Reihenentwicklung aus 166) nimmt; man erhält dann, indem man linker Hand noch die Relation 169) berücksichtigt,

$$U_1^2(z)+U_2^2(z)=U_3^2(z)+U_4^2(z)=\frac{1}{n^2}-\frac{z^2}{n(1-n)(2-n)}\cdot\frac{1}{n-1}+\frac{z^4}{n(1-n)(2-n)(3-n)(4-n)}\cdot\frac{1}{n-2}-\ldots$$

Weitere Entwicklungen dieser Art mögen unterbleiben, vielmehr wollen wir jetzt die Functionalgleichungen aufstellen, denen die U als Functionen von n betrachtet, genügen. Man gelangt zu denselben, wenn man die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{d^2\cos z}{dz^2}+\cos z=0; \qquad \frac{d^2\sin z}{dz^2}+\sin z=0$$

derivirt, und man erhält zunächst

$$\overset{z}{\underset{0}{D}}{}^n\frac{d^2\cos z}{dz^2}+\overset{z}{\underset{0}{D}}{}^n\cos z=0; \qquad \overset{z}{\underset{0}{D}}{}^n\frac{d^2\sin z}{dz^2}+\overset{z}{\underset{0}{D}}{}^n\sin z=0.$$

Nach 64) ist aber

$$\overset{z}{\underset{0}{D}}{}^n\frac{d^2\cos z}{dz^2}=\overset{z}{\underset{0}{D}}{}^{n+2}\cos z-\frac{1}{\Gamma(-1-n)}\cdot\frac{1}{z^{n+2}}; \qquad \overset{z}{\underset{0}{D}}{}^n\frac{d^2\sin z}{dz^2}=\overset{z}{\underset{0}{D}}{}^{n+2}\sin z-\frac{1}{\Gamma(-n)}\cdot\frac{1}{z^{n+1}}.$$

Somit lauten die derivirten Differentialgleichungen:

$$\overset{z}{\underset{0}{D}}{}^{n+2}\cos z+\overset{z}{\underset{0}{D}}{}^n\cos z=\frac{1}{\Gamma(-1-n)}\cdot\frac{1}{z^{n+2}}; \qquad \overset{z}{\underset{0}{D}}{}^{n+2}\sin z+\overset{z}{\underset{0}{D}}{}^n\sin z=\frac{1}{\Gamma(-n)}\cdot\frac{1}{z^{n+1}}.$$

Schreibt man jetzt der Deutlichkeit wegen $U(z,n)$ für $U(z)$, so geben diese Differentialgleichungen in Verbindung mit 165)

$$171)\left\{\begin{aligned}(n+1)(n+2)\,U_1(z,n+2)+z^2\,U_1(z,n)&=n+1\\(n+1)(n+2)\,U_2(z,n+2)+z^2\,U_2(z,n)&=-z\\(n+1)(n+2)\,U_3(z,n+2)+z^2\,U_3(z,n)&=(n+1)\cos z-z\sin z\\(n+1)(n+2)\,U_4(z,n+2)+z^2\,U_4(z,n)&=(n+1)\sin z+z\cos z.\end{aligned}\right.$$

Quadrirt man diese vier Gleichungen, und zieht die Summe der beiden letzten von der Summe der beiden ersten ab, so erhält man unter Berücksichtigung der für alle n geltenden Formel 169)

$$U_1(z,n)\,U_1(z,n+2)+U_2(z,n)\,U_2(z,n+2)=U_3(z,n)\,U_3(z,n+2)+U_4(z,n)\,U_4(z,n+2);$$

diese Gleichung ist ein specieller Fall der folgenden allgemein giltigen Gleichung:

$$U_1(z,n)\,U_1(z,n')+U_2(z,n)\,U_2(z,n')=U_3(z,n)\,U_3(z,n')+U_4(z,n)\,U_4(z,n').$$

Um die Functionalgleichungen 171) vollständig zu lösen, genügt es, die Lösung der folgenden zu kennen:

$$(n+1)(n+2)\,V(n+2)+z^2\,V(n)=0.$$

Setzt man

$$V(n)=i^n z^n.\,W(n),$$

so lautet diese Functionalgleichung einfach:

$$(n+1)(n+2)\,W(n+2)=W(n).$$

Dividirt man dieselbe durch

$$(n+1)(n+2)\,\Gamma(-n-2)=\Gamma(-n),$$

so hat man ferner:

$$\frac{W(n+2)}{\Gamma(-n-2)}=\frac{W(n)}{\Gamma(-n)}.$$

Setzt man diesen Quotienten $= w(n)$, so ist $w(n)$ eine periodische Function mit der Periode 2, denn $w(n+2) = w(n)$; daher ist

$$W(n) = w(n)\Gamma(-n),$$

und schliesslich

$$V(n) = w(n) i^n z^n \Gamma(-n). \tag{172)}$$

Die periodische Function $w(n)$ ist im Übrigen vollständig willkürlich. Jetzt sind die Lösungen von 171) beziehungsweise

$$U_1(z,n) + V(n); \qquad U_2(z,n) + V(n); \qquad U_3(z,n) + V(n); \qquad U_4(z,n) + V(n),$$

wo die U durch 166) und V durch 172) gegeben ist.

6.

Ein Beispiel für eine transscendente gebrochene Function ist:

$$f(z) = \frac{1}{\sin z}.$$

Dieselbe besitzt unendlich viele Unendlichkeitspunkte $0, \pi, 2\pi, \ldots -\pi, -2\pi, \ldots$ und ist sonst durchwegs eindeutig. Ein einmaliger Umlauf im positiven Sinne um $t = \mu\pi$, wo μ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl oder auch Null ist, liefert

$$\left\{ \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{\sin z} \right\} = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{\sin z} + \frac{1}{\Gamma(-n)} \cdot \int_{K_{\mu\pi}} \frac{dt}{\sin t (z-t)^{n+1}}.$$

Nun ist

$$\int_{K_{\mu\pi}} \frac{dt}{\sin t (z-t)^{n+1}} = 2i\pi \cdot \frac{\Gamma(1)}{2i\pi} \cdot \int_{K_{\mu\pi}} \frac{(t-\mu\pi)(z-t)^{-n-1}\, dt}{\sin t\, (t-\mu\pi)} = 2i\pi \left[\frac{t-\mu\pi}{\sin t\, (z-t)^{n+1}} \right]_{(t=\mu\pi)}$$

$$= (-1)^\mu \cdot \frac{2i\pi}{(z-\mu\pi)^{n+1}};$$

somit ist

$$\left\{ \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{\sin z} \right\} = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{\sin z} + \frac{(-1)^\mu}{\Gamma(-n)} \cdot \frac{2i\pi}{(z-\mu\pi)^{n+1}}.$$

Allgemein ist daher

$$\left\{ \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{\sin z} \right\} = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{1}{\sin z} + \frac{2i\pi}{\Gamma(-n)} \sum_\mu \frac{\lambda_\mu}{(z-\mu\pi)^{n+1}}, \tag{173)}$$

wo die λ_μ gewisse, von der Art der Umläufe abhängige Zahlen sind.

Wegen dieses allgemeinsten Werthes kann daher von einer linearen Differentialgleichung mit eindeutigen Coëfficienten, der diese Derivation genügen würde, keine Rede sein, weil eine solche Differentialgleichung unendlich viele linear von einander unabhängige Particularlösungen haben müsste.

Anders ist es bei der Function

$$f(z) = \frac{e^{-z}}{z^p},$$

wo p eine beliebige complexe Zahl bedeutet. Diese Function hat im Endlichen blos den Ausnahmepunkt $t = 0$, und ist unendlich vieldeutig. Für einen einmaligen Umlauf um den Nullpunkt im positiven Sinne hat man

$$\left\{ \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{e^{-z}}{z^p} \right\} = e^{-2ip\pi} \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^n \frac{e^{-z}}{z^p} + \frac{1}{\Gamma(-n)} \cdot \int_{K_0} \frac{e^{-t}\, dt}{t^p (z-t)^{n+1}}.$$

Hiebei ist für das letzte Curvenintegral

$$\int_{K_0} \frac{e^{-t}dt}{t^p(z-t)^{n+1}} = \frac{2i\pi}{\Gamma(p)} \cdot \frac{\Gamma(p)}{2i\pi} \cdot \int_{K_0} \frac{e^{-t}(z-t)^{-n-1}}{t^p} dt = \frac{2i\pi}{\Gamma(p)} \overset{t=0}{\underset{t=a}{D}}{}^{p-1} \frac{e^{-t}}{(z-t)^{n+1}},$$

wo sich die Derivation natürlich auf t bezieht; man hat also

$$\left\{\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \frac{e^{-z}}{z^p}\right\} = e^{-2ip\pi} \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \frac{e^{-z}}{z^p} + \frac{2i\pi}{\Gamma(-n)\Gamma(p)} \cdot \overset{t=0}{\underset{t=a}{D}}{}^{p-1} \frac{e^{-t}}{(z-t)^{n+1}},$$

und für einen h-maligen Umlauf:

174) $$\left\{\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \frac{e^{-z}}{z^p}\right\} = e^{-2iph\pi} \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \frac{e^{-z}}{z^p} + \frac{2i\pi}{\Gamma(-n)\Gamma(p)} \cdot \frac{\sin ph\pi}{\sin p\pi} \cdot e^{-ip(h-1)\pi} \overset{t=0}{\underset{t=a}{D}}{}^{p-1} \frac{e^{-t}}{(z-t)^{n+1}}.$$

Um hievon eine Anwendung zu zeigen, gehen wir aus von der Differentialgleichung

$$z\frac{d\omega}{dz} + (p+z)\omega = 0,$$

zu der das Integral

$$\omega = \frac{e^{-z}}{z^p}$$

gehört. Wir deriviren diese Differentialgleichung und erhalten

$$z \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \frac{d\omega}{dz} + n \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-1} \frac{d\omega}{dz} + (p+z) \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \omega + n \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-1} \omega = 0.$$

Für die zwei ersten Glieder hat man nach 62)

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \frac{d\omega}{dz} = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+1} \omega - \frac{a^{-p}e^{-a}}{\Gamma(-n)(z-a)^{n+1}}$$

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-1} \frac{d\omega}{dz} = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \omega - \frac{a^{-p}e^{-a}}{\Gamma(1-n)(z-a)^{n}};$$

demnach wird die derivirte Differentialgleichung zu

$$z \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n+1} \omega + (p+n+z) \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \omega + n \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-1} \omega = \frac{a^{1-p}e^{-a}}{\Gamma(-n)(z-a)^{n+1}};$$

worin die untere Grenze a willkürlich ist. Zu dieser Differentialgleichung, die wir in der Form

175) $$z\frac{d^2\varphi}{dz^2} + (p+n+z)\frac{d\varphi}{dz} + n\varphi = \frac{a^{1-p}e^{-a}}{\Gamma(-n)(z-a)^{n+1}}$$

schreiben wollen, gehört vermöge ihrer Herleitung das Integral

$$\varphi = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-1} \omega = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-1} \frac{e^{-z}}{z^p}$$

oder auch nach 174)

$$\varphi = e^{-2iph\pi} \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-1} \frac{e^{-z}}{z^p} + \frac{2i\pi . e^{-ip(h-1)\pi}}{\Gamma(1-n)\Gamma(p)} \frac{\sin ph\pi}{\sin p\pi} \overset{t=0}{\underset{=a}{D}}{}^{p-1} \frac{e^{-t}}{(z-t)^{n}}.$$

Daraus kann man aber nicht schliessen, dass die letzte, nach t zu nehmende Derivation für sich allein der homogenen Differentialgleichung genügt, aus dem einfachen Grunde, weil die erste Derivation wegen des

Factors $e^{-2ihp\pi}$ nicht mehr für sich allein der vollständigen Differentialgleichung genügt. Lässt man aber in 175) die bisher willkürliche Grösse a nach $+\infty$ convergiren, so wird daraus die homogene Differentialgleichung

$$z\frac{d^2\psi}{dz^2}+(p+n+z)\frac{d\psi}{dz}+n\psi=0 \tag{176}$$

und dieser genügt sowohl

$$\psi=\overset{z}{\underset{\infty}{D}}{}^{n-1}\frac{e^{-z}}{z^p}$$

als auch

$$\psi=e^{-2iph\pi}\overset{z}{\underset{\infty}{D}}{}^{n-1}\frac{e^{-z}}{z^p}+\frac{2i\pi e^{-ip(h-1)\pi}}{\Gamma(1-n)\Gamma(p)}\frac{\sin ph\pi}{\sin p\pi}\overset{t=0}{\underset{t=\infty}{D}}{}^{p-1}\frac{e^{-t}}{(z-t)^n}.$$

Daher ist zunächst die vollständige Lösung von 176):

$$\psi=c_1\overset{z}{\underset{\infty}{D}}{}^{n-1}\frac{e^{-z}}{z^p}+c_2\overset{t=0}{\underset{t=\infty}{D}}{}^{p-1}\frac{e^{-t}}{(z-t)^n}, \tag{177}$$

und nun lässt sich auch die vollständige Lösung von 175) angeben, nämlich:

$$\varphi=\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-1}\frac{e^{-z}}{z^p}+c_1\overset{z}{\underset{\infty}{D}}{}^{n-1}\frac{e^{-z}}{z^p}+c_2\overset{t=0}{\underset{t=\infty}{D}}{}^{p-1}\frac{e^{-t}}{(z-t)^n}. \tag{178}$$

Ist real$(1-p)>0$, so lässt sich von 176) auch noch eine andere Particularlösung angeben, man kann dann nämlich in 175) $a=0$ nehmen, um diese Differentialgleichung in eine homogene zu überführen; es ist also auch

$$\psi_1=\overset{z}{\underset{0}{D}}{}^{n-1}\frac{e^{-z}}{z^p}\qquad\qquad \text{real}\,(1-p)>0$$

eine Particularlösung von 176). Nach 177) schliessen wir hieraus auf eine lineare Beziehung zwischen den drei Derivationen

$$\overset{z}{\underset{0}{D}}{}^{n-1}\frac{e^{-z}}{z^p},\qquad \overset{z}{\underset{\infty}{D}}{}^{n-1}\frac{e^{-z}}{z^p},\qquad \overset{t=0}{\underset{t=\infty}{D}}{}^{p-1}\frac{e^{-t}}{(z-t)^n},$$

und diese lautet:

$$\overset{z}{\underset{\infty}{D}}{}^{n-1}\frac{e^{-z}}{z^p}-\frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(1-n)}e^{-ip\pi}\overset{t=0}{\underset{t=\infty}{D}}{}^{p-1}\frac{e^{-t}}{(z-t)^n}=\overset{z}{\underset{0}{D}}{}^{n-1}\frac{e^{-z}}{z^p}\qquad\qquad \text{real}\,(1-p)>0,$$

und lässt sich sehr leicht verificiren.

Es möge auch erwähnt werden, dass sich, wie Weiler gezeigt hat (Crelle's Journal 51), mittelst passender Substitutionen die folgende allgemeine Differentialgleichung

$$(p_2+q_2z)\frac{d^2\psi}{dz^2}+(p_1+q_1z)\frac{d\psi}{dz}+(p_0+q_0z)\psi=0$$

stets auf die einfachere 176) zurückführen lässt.

Ferner lässt sich aus 175) durch nochmalige Differentiation eine Differentialgleichung dritter Ordnung bilden und vollständig integriren, nämlich, wenn man χ statt φ schreibt,

$$\left.\begin{aligned}&z(z-a)\frac{d^3\chi}{dz^3}+[z^2+(2n+p-a+2)z-(p+n+1)a]\frac{d^2\chi}{dz^2}\\&\quad+[(2n+2)z+(p+n-a)(n+1)]\frac{d\chi}{dz}+n(n+1)\chi=0;\end{aligned}\right\} \tag{179}$$

und ihre Integralgleichung ist:

180) $$\chi = c_1 \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-1} \frac{e^{-z}}{z^p} + c_2 \overset{z}{\underset{\infty}{D}}{}^{n-1} \frac{e^{-z}}{z^p} + c_3 \overset{t=0}{\underset{t=\infty}{D}}{}^{p-1} \frac{e^{-t}}{(z-t)^n},$$

ausgenommen, n ist eine ganze positive Zahl, oder $a = 0$. Ist n eine ganze positive Zahl $= \nu$, so findet sich nach derselben Methode, wie sie schon früher angewandt wurde,

180a) $$\chi = c_1 \int_{K_z} \frac{e^{-t} l(t-z)\, dt}{t^p (t-z)^\nu} + c_2 \overset{z}{D}{}^{\nu-1} \frac{e^{-z}}{z^p} + c_3 \overset{t=0}{\underset{t=\infty}{D}}{}^{p-1} \frac{e^{-t}}{(z-t)^\nu};$$

und um den Fall $a = 0$ zu erledigen, schreiben wir vorerst statt 180)

$$\chi = c_1 \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-1} \frac{e^{-z}}{z^p} + c_2 \overset{z}{\underset{0}{D}}{}^{n-1} \frac{e^{-z}}{z^p} + c_3 \overset{z}{\underset{\infty}{D}}{}^{n-1} \frac{e^{-z}}{z^p},$$

was wir wegen der oben erwähnten linearen Beziehung unter der Voraussetzung real$(1-p) > 0$ dürfen. Wird $a = 0$, so werden die ersten beiden Particularlösungen einander gleich; wir bilden daher aus ihnen die neue Particularlösung

$$\chi' = \operatorname{Lim} \frac{1}{\delta} \left[\overset{z}{\underset{\delta}{D}}{}^{n-1} \frac{e^{-z}}{z^p} - \overset{z}{\underset{0}{D}}{}^{n-1} \frac{e^{-z}}{z^p} \right]_{(\delta=0)} = \left[\frac{\partial}{\partial a} \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n-1} \frac{e^{-z}}{z^p} \right]_{(a=0)},$$

was im Wesentlichen darauf hinauskommt, den Differentialquotienten der Derivation nach der unteren Grenze zu bestimmen. Das ist nun sehr einfach, und man hat allgemein nach 61)

181) $$\frac{\partial}{\partial a} \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} f(z) = -\frac{1}{\Gamma(-n)} \cdot \frac{f(a)}{(z-a)^{n+1}},$$

wenn die Grösse a in $f(z)$ nicht als Parameter vorkommt. In unserem Falle ist also, abgesehen von einer Constanten,

$$\chi' = \frac{1}{z^n}$$

und die vollständige Lösung lautet

$$\chi = \frac{c_1}{z^n} + c_2 \overset{z}{\underset{0}{D}}{}^{n-1} \frac{e^{-z}}{z^p} + c_3 \overset{z}{\underset{\infty}{D}}{}^{n-1} \frac{e^{-z}}{z^p},$$

unter der Bedingung real$(1-p) > 0$. Man kann diese Bedingung nun auch wegschaffen, wenn man für die zweite Particularlösung wieder mittelst der linearen Beziehung die früheren beiden einführt, nämlich:

180b) $$\chi = \frac{c_1}{z^n} + c_2 \overset{z}{\underset{\infty}{D}}{}^{n-1} \frac{e^{-z}}{z^p} + c_3 \overset{t=0}{\underset{t=\infty}{D}}{}^{p-1} \frac{e^{-t}}{(z-t)^n} \qquad a = 0.$$

Die Lösungen von 179) sind hiemit für alle Fälle durchgeführt.

7.

Behufs nachheriger Anwendung betrachten wir noch die Derivationen der beiden Functionen

$$f(z) = \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}; \qquad f(z) = \frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}.$$

Für die erste Function genügt die Bemerkung, dass dieselbe durchgängig endlich, stetig und eindeutig ist, also wird auch ihre Derivation nirgends im Endlichen einen Ausnahmepunkt haben, also

182) $$\left\{ \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}} \right\} = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}.$$

Anders ist es bei der zweiten Function, welche zweiwerthig ist und für $z=0$ unendlich und unstetig wird. Ein einmaliger Umlauf um diesen Punkt liefert

$$\left\{ \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}} \right\} = -\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}} + \frac{1}{\Gamma(-n)} \int_{K_0} \frac{\cos\sqrt{t}\,.\,dt}{\sqrt{t}(z-t)^{n+1}},$$

dagegen ein zweimaliger Umlauf

$$\left\{ \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}} \right\} = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}} + \frac{1}{\Gamma(-n)} \int_{K_0} \frac{\cos\sqrt{t}\,dt}{\sqrt{t}\,(z-t)^{n+1}} - \frac{1}{\Gamma(-n)} \int_{K_0} \frac{\cos\sqrt{t}\,dt}{\sqrt{t}\,(z-t)^{n+1}}$$

$$= \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}.$$

Ein zweimaliger Umlauf hat also gar keine Wirkung. Allgemein hat eine ungerade Anzahl von Umläufen um den Nullpunkt die Wirkung eines einzigen Umlaufes, und eine gerade Anzahl von Umläufen gar keine Wirkung. Die vorletzte Gleichung lässt sich noch etwas anders schreiben, nämlich es ist einerseits

$$\frac{1}{\Gamma(-n)} \int_{K_0} \frac{\cos\sqrt{t}}{(z-t)^{n+1}} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{2i\pi}{\Gamma(-n)\,.\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \overset{t=0}{\underset{t=a}{D}}{}^{-\frac{1}{2}} \frac{\cos\sqrt{z}}{(z-t)^{n+1}} = \frac{2}{\Gamma(-n)} \int_a^0 \frac{\cos\sqrt{t}}{(z-t)^{n+1}} \frac{dt}{\sqrt{t}},$$

anderseits ist weiter für real $n<0$

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\Gamma(-n)} \int_a^z \frac{\cos\sqrt{t}}{(z-t)^{n+1}} \frac{dt}{\sqrt{t}};$$

daher

$$-\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}} + \frac{1}{\Gamma(-n)} \int_{K_0} \frac{\cos\sqrt{z}}{(z-t)^{n+1}} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}} - \frac{2}{\Gamma(-n)} \int_0^z \frac{\cos\sqrt{z}}{(z-t)^{n+1}} \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$= \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}} - 2\,\overset{z}{\underset{0}{D}}{}^{n} \frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}.$$

Das gilt nun auch für beliebige n, wie man durch Differentiation nach z leicht findet; somit ist schliesslich

$$\left.\begin{aligned} \left\{ \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}} \right\} &= \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}} \\ \left\{ \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}} \right\} &= \overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n} \frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}} - 2\,\overset{z}{\underset{0}{D}}{}^{n} \frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}, \end{aligned}\right\} \tag{183}$$

wo sich die erste Gleichung auf eine gerade, die zweite auf eine ungerade Anzahl von Umläufen von z um den Nullpunkt bezieht. Wir gehen nun aus von der Differentialgleichung

$$4z\frac{d^2\omega}{dz^2} + 6\frac{d\omega}{dz} + \omega = 0,$$

zu der die beiden Integrale gehören:

$$\omega = \frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}} \text{ und } \omega = \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}.$$

Wir nehmen zuerst

$$\omega = \frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}},$$

und deriviren die Differentialgleichung

$$4z\omega'' + 6\omega' + \omega = 0,$$

nach der schon wiederholt gezeigten Methode; dann wird, wenn man zur Abkürzung

$$\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}=\varphi$$

setzt

184) $$4z\frac{d^2\varphi}{dz^2}+(4n+6)\frac{d\varphi}{dz}+\varphi=-\frac{2\sin\sqrt{a}}{\Gamma(-n)(z-a)^{n+1}}+\frac{4\sqrt{a}\cos\sqrt{a}}{\Gamma(-1-n)(z-a)^{n+2}}$$

Von dieser Differentialgleichung ist zufolge der Herleitung

$$\varphi=\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$$

eine Particularlösung, daher ist nach 183)

$$\psi_1=\overset{z}{\underset{0}{D}}{}^{n}\frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$$

eine Particularlösung von der homogenen Differentialgleichung

185) $$4z\frac{d^2\psi}{dz^2}+(4n+6)\frac{d\psi}{dz}+\psi=0,$$

wie man auch leicht erfährt, wenn man in 184) $a=0$ setzt.

Setzt man in 184) real$(n+1)>0$; so liefert der Grenzübergang zu $a=\infty$ ebenfalls die homogene Differentialgleichung 185); zu derselben gehört somit auch die Particularlösung

$$\psi_2=\overset{z}{\underset{\infty}{D}}{}^{n}\frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\qquad\text{real}\,(n+1)>0.$$

Ist $n=\nu$ eine ganze positive Zahl, so werden diese beiden Particularlösungen gleich, und man hat dann statt ihrer zu nehmen:

186) $$\psi=c_1\int_{K_z}\frac{\cos\sqrt{t}\,.\,l(t-z)}{\sqrt{t}\,.\,(t-z)^{\nu+1}}\,dt+c_2\overset{z}{D}{}^{\nu}\frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\qquad n=\nu,$$

wobei K_z eine vom Nullpunkt ausgehende um z gelegte Schlinge ist. Die Lösung von 184) lautet:

187) $$\varphi=\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}+c_1\overset{z}{\underset{0}{D}}{}^{n}\frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}+c_2\overset{z}{\underset{\infty}{D}}{}^{n}\frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\qquad\text{real}\,(n+1)>0.$$

Ist in 184) n eine ganze positive Zahl $=\nu$, so übergeht diese Differentialgleichung in die homogene 185), zu der dann das Lösungssystem 186) gehört.

Nehmen wir in der obigen Differentialgleichung

$$\omega=\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}},$$

so führt das auf die Differentialgleichung

188) $$4z\frac{d^2\chi}{dz^2}+(4n+6)\frac{d\chi}{dz}+\chi=\frac{2\cos\sqrt{a}}{\Gamma(-n)(z-a)^{n+1}}+\frac{4\sqrt{a}\sin\sqrt{a}}{\Gamma(-1-n)(z-a)^{n+2}},$$

und zu dieser gehört die Lösung:

$$\chi=\overset{z}{\underset{a}{D}}{}^{n}\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}+\psi,$$

worin für ψ die angegebenen Ausdrücke zu setzen sind. Lässt man auch in 188) $a = \infty$ werden, während real$(n+1) > 0$ vorausgesetzt wird, so erhält man ebenfalls die homogene Differentialgleichung 185), und zu dieser gehört somit auch die Particularlösung

$$\psi_3 = \overset{z}{\underset{\infty}{D}}{}^n \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}} \qquad \text{real}\,(n+1) > 0.$$

Wir schliessen daraus, dass zwischen ψ_1, ψ_2 und ψ_3 eine lineare Beziehung von der Form

$$c_1 \overset{z}{\underset{0}{D}}{}^n \frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}} + c_2 \overset{z}{\underset{\infty}{D}}{}^n \frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}} + c_3 \overset{z}{\underset{\infty}{D}}{}^n \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = 0 \qquad \text{real}\,(n+1) > 0$$

besteht, deren Aufsuchung und Verificirung dem Leser überlassen bleiben möge.

Wir haben zu der Differentialgleichung 185)

$$4z\frac{d^2\psi}{dz^2} + (4n+6)\frac{d\psi}{dz} + \psi = 0$$

das allgemein giltige Particularintegral

$$\psi_1 = \overset{z}{\underset{0}{D}}{}^n \frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$$

gefunden. Es sei nun h eine ganze positive Zahl oder auch Null, so setzen wir

$$n = -h - \frac{1}{2},$$

dann kommt:

$$\left.\begin{aligned} &4z\frac{d^2\psi}{dz^2} + (4-4h)\frac{d\psi}{dv} + \psi = 0 \\ &\psi_1 = \overset{z}{\underset{0}{D}}{}^{-h-\frac{1}{2}} \frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\Gamma\left(h+\frac{1}{2}\right)}\int_0^z \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{z}}(z-t)^{h-\frac{1}{2}}\,dt. \end{aligned}\right\} \tag{190}$$

Substituirt man weiter

$$\psi_1 = y \, . \, z^{\frac{h}{2}},$$

so erhält man

$$4z^2\frac{d^2y}{dz^2} + 4z\frac{dy}{dz} + (z-h^2)\,y = 0$$

$$y = \frac{z^{-\frac{h}{2}}}{\Gamma\left(h+\frac{1}{2}\right)}\int_0^z \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}(z-t)^{h-\frac{1}{2}}\,dt.$$

Setzt man nun noch

$$z = x^2,$$

so wird schliesslich:

$$\left.\begin{aligned} &x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2-h^2)\,y = 0 \\ &y = \frac{x^{-h}}{\Gamma\left(h+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{x^2} \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}(x^2-t)^{h-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{2x^h}{\Gamma\left(h+\frac{1}{2}\right)}\int_0^1 \cos(xt)\,(1-t^2)^{\frac{2h-1}{2}}\,dt, \end{aligned}\right\} \tag{191}$$

wobei im Integrale statt $t \ldots x^2t^2$ substituirt wurde.

Die Differentialgleichung 191) ist die Bessel'sche Differentialgleichung, und ein particuläres Integral derselben ist die Bessel'sche Function von der Ordnung h; nämlich

$$y = 2^h\sqrt{\pi}\,J^{(h)}(x),$$

so dass für $J^{(h)}(x)$ die bekannte Darstellung resultirt:

$$J^{(h)}(x) = \frac{2 \, . \, x^h}{1 \, . \, 3 \, . \, 5 \, .. \, (2h-1) \, . \, \pi} \int_0^1 \cos(xt) \, . \, (1-t^2)^{\frac{2h-1}{2}} dt,$$

und anderseits findet sich, wenn man die vorigen Substitutionen in umgekehrter Anordnung anwendet,

192) $$J^{(h)}(\sqrt{z}) = \frac{1}{2^h z^{\frac{h}{2}} \sqrt{\pi}} \cdot \overset{z}{\underset{0}{D}}{}^{-h-\frac{1}{2}} \frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}.$$

Durch Differentiation nach z leitet man hieraus ohne Mühe die bekannte Beziehung

$$h \, . \, J^{(h)}(x) + x \frac{d J^{(h)}(x)}{dx} = x J^{(h-1)}(x)$$

ab. Die rechte Seite der Gleichung 192) hat auch bei beliebigem complexen h einen Sinn, und es kann daher diese Gleichung zur Definition der verallgemeinerten Bessel'schen Function dienen. Für diese folgt dann vermöge der III. Fundamentaleigenschaft der Derivation:

193) $$2^n \overset{z}{\underset{0}{D}}{}^n \left[z^{\frac{h}{2}} J^{(h)}(\sqrt{z})\right] = z^{\frac{h-n}{2}} J^{(h-n)}(\sqrt{z}) \qquad \text{real}\,(h+1) > 0,$$

worin n ganz beliebig ist. Unter der Voraussetzung real $n < 0$ lässt sich die Derivation durch das bestimmte Integral darstellen; es wird dann

$$\frac{2^n}{\Gamma(-n)} \int_0^z \frac{t^{\frac{h}{2}} J^{(h)}(\sqrt{t})}{(z-t)^{n+1}} dt = z^{\frac{h-n}{2}} J^{(h-n)}(\sqrt{z}) \qquad \begin{array}{l} \text{real}\,(h+1) > 0 \\ \text{real}\, n < 0. \end{array}$$

Lässt man t^2 an die Stelle von t, und z^2 an die Stelle von z treten, so erhält man daraus die Integralformel:

194) $$\int_0^z \frac{t^{h+1} J^{(h)}(t)}{(z^2-t^2)^{n+1}} dt = \frac{\Gamma(-n) \, . \, z^{h-n}}{2^{n+1}} J^{(h-n)}(z) \qquad \begin{array}{l} \text{real}\,(h+1) > 0 \\ \text{real}\, n < 0. \end{array}$$